“探究弹力与弹簧伸长量关系”实验的研究

徐正海　周传娟

（当涂第一中学　安徽 马鞍山　243100）

（收稿日期：2015 - 10 - 20）

胡克定律是中学物理教学的一个基本内容，而与其相关的“探究弹力与弹簧伸长量的关系”实验，则是高考指定的考点之一. 下面有一个备考题，其流行解答值得思考.

【题目】在研究弹力与弹簧伸长量关系的实验中，首先将弹簧水平放置测出其自然长度，然后竖直悬挂让其自然下垂，如图 1 所示；在其下端施加外力 F（即钩码重力），实验过程是在弹簧的弹性限度内进行的. 用记录的外力 F 与弹簧伸长量 x 作出 $F-x$ 图像，如图 2 所示. 问：

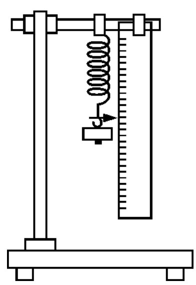

图 1

（1）弹簧的劲度系数 κ 是多少？

（2）图线不过坐标原点的原因是什么？

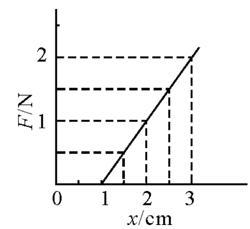

图 2

【流行解答】因为 $F-x$ 图线的函数关系为 $F=-F_0+\kappa x=-1+100x$，而图线的斜率等于弹簧劲度系数，故 $\kappa=100\ \mathrm{N/m}$；当 $x=0$ 时，$F=-F_0$，可见 $F_0=1\ \mathrm{N}$ 表达了弹簧自身的重力大小，这也是引起图线不过原点的原因.

从以上例题可以看出，用替换电阻的方法，扩展了串并联电路的概念，对简化复杂电路并进行有关计算是简便的方法. 实际上，即使电路中包含电感和电容，这个方法也是简便可行的.

附：练习（供读者练习用替换电阻方法解题参考）

练习 1：由 8 根相同的金属线连接成一个底边为正方形的等边四角形框架如图 15 所示. 每根金属线的电阻为 r，若电流自 A 点流入，求下列情况下此框架的总电阻.

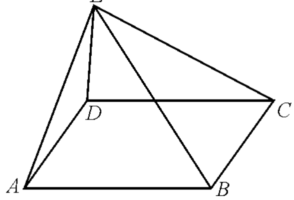

图 15

（1）电流由 B 点流出；

（2）电流由 C 点流出；

（3）电流由 E 点流出.

练习 2：三角形棱锥体 $ABCD$ 由 6 根金属导线连成，每根金属导线的电阻如图 16 所示. 求 A，B 两点间的等效电阻 R_{AB}.

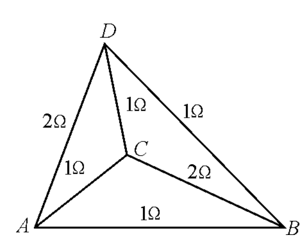

图 16

练习答案：

1.（1）$\dfrac{8}{15}r$；（2）$\dfrac{2}{3}r$；（3）$\dfrac{7}{15}r$.

2. $\dfrac{7}{12}r$

解析：事实上，悬挂弹簧形变量的大小只与外力 F 和弹簧的自重 m_0 有关[1]. 如图 3 所示，若采用“微元法”把弹簧分成 n 等份，则弹簧转化模型为竖直方向上有 n 个小物块，每块质量为 $\frac{m_0}{n}$，其间用理想轻质弹簧连接，轻弹簧劲度系数为 $n\kappa$，设相邻小物块间弹簧伸长量由低往高依次为 $\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n$，于是有

$$n\kappa\Delta x_1 = F + \frac{m_0}{n}g$$

$$n\kappa\Delta x_2 = F + \frac{2m_0}{n}g$$

$$\cdots$$

$$n\kappa\Delta x_n = F + m_0 g$$

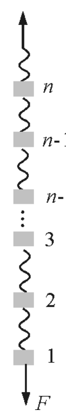

图 3

整理

$$x = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \cdots + \Delta x_n = \frac{1}{n\kappa}\left[nF + \frac{m_0 g}{n}(1 + 2 + \cdots + n)\right] = \frac{m_0 g(1+n)}{2n\kappa} + \frac{F}{\kappa}$$

当 $n \to \infty$ 时，$F = -\frac{m_0 g}{2} + \kappa x$，式中 x 指弹簧的形变量，它为弹簧挂重时长 l 与其放置水平桌面长度 l'_0 之差.

目前，在众多复习备考资料中，该实验的基本原理表述为：首先让弹簧自然下垂，用刻度尺测出弹簧自然伸长状态时的长度 l_0，即原长；其次在弹簧下端悬挂质量为 m 的钩码，量出此时弹簧的长度 l，则弹力 F（大小等于所挂钩码的重力）应被验证为 $F = \kappa(l - l_0) = \kappa x$，与上式对比发现，两式中的 x 实指含义不同，上式中的 x，并未剔除由弹簧下垂所带来的附加形变量，若将其过渡为挂重时的形变量，并记 $\Delta l_0 = l_0 - l'_0$，则

$$F = -\frac{m_0 g}{2} + \kappa(x + \Delta l_0) = \kappa x + \kappa\Delta l_0 - \frac{m_0 g}{2}$$

则得 $\kappa\Delta l_0 = \frac{m_0 g}{2}$ 的结论. 不过，解读这一结论的物理原理不是十分清楚.

回到流行解答，当 $F = 0$ 时，$x = \Delta l_0$ 为弹簧自然下垂对应的形变量；当 $x = 0$ 时

$$F = -F_0 = -\frac{m_0 g}{2}$$

即弹簧自重

$$m_0 g = 2\ \mathrm{N}$$

事实上，胡克在 17 世纪 70 年代末研究并发表的是弹性杆拉伸与压缩形变的规律 —— 应力与应变成正比. 其中，应力是物体中各部分之间相互作用的内力，它包括正应力和剪应力，与之对应的是体应变和剪应变.

一般地，设被一面元 ΔS 分开的两部分物质之间的作用力和反作用力分别为 $\Delta \boldsymbol{f}$ 和 $-\Delta \boldsymbol{f}$，则在此截面上的应力定义为 $\boldsymbol{\tau} = \lim\limits_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{f}}{\Delta S} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{f}}{\mathrm{d}S}$. 不过具体到在直杆两端加上与杆平行的力 f 拉伸或压缩时，杆的长度 l_0 将有所改变（拉伸时 $\Delta l > 0$，压缩时 $\Delta l < 0$），此种应变 ε 以长度的相对增量 $\frac{\Delta l}{l_0}$ 来表征. 设杆的截面积为 S，则其两端的应力为 $\tau = \frac{f}{S}$. 在弹性限度内应力 τ 与应变 ε 成正比：$\tau = Y\varepsilon = Y\frac{\Delta l}{l_0}$，系数 Y 称为杨氏模量[2]，其单位是与应力的单位相同为帕(Pa).

弹力与形变的定量关系，一般来讲比较复杂. 而弹簧的弹力与弹簧的伸长量（或压缩量）的关系则比较简单. 实验表明，弹簧发生弹性形变时，弹力的大小 F 跟弹簧伸长（或缩短）的长度 x 成正比，即 $F = \kappa x$，式中 κ 称为弹簧的劲度系数. 这个规律在中学教程中被称为胡克定律.

实际上，F 应该是指弹簧中的张力，只有水平放置的轻质弹簧，其中的张力才处处相等，而对于悬挂有质量的弹簧，其中的张力各处并不相等，这时“探究弹力与弹簧伸长量的关系”的实验本质，会由于弹簧自重的影响，使其实验图线的斜率只能作为该弹簧的“等效劲度系数”.

参 考 文 献

1　方银良. 非平衡态下弹簧测力计测量示数的研究. 物理通报，2010(7)：58 ～ 59

2　赵凯华，罗蔚茵. 新概念物理教程·力学. 北京：高等教育出版社，2004