

变换参考系解二体问题

——以 2014 年北约自主招生一道物理题为例

王 勇

(常州高级中学 江苏 常州 213000)

(收稿日期:2015-10-16)

【题目】真空中质量分别为 m_1 和 m_2 的两个小球,只受万有引力作用,某个时刻两个小球相距 l_0 ,小球 1 的速度为 v_0 ,方向指向小球 2,小球 2 的速度为 v_0 ,速度方向垂直两球球心的连线,问若 $m_1 = m_2 = m_0$,当速度 v_0 满足什么条件时,两小球的间距可以为无穷远?

解法 1:惯性参考系法(质心参考系)

解题思路:寻找惯性参考系,分析两小球相对于惯性参考系的受力,确定两小球在惯性参考系的运动特点,直接运用牛顿运动定律或能量守恒求两小球相对惯性参考系的位移。

两小球组成的系统不受外力,质心做匀速直线运动,以质心为惯性参考系。

方法 1:小球 1 距质心

$$r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} r$$

质心的速度

$$v_{Cx} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

$$v_{Cy} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_2$$

小球 1 相对于质心速度为

$$v_{1x} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_1$$

$$v_{1y} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_2$$

方向如图 1 所示。

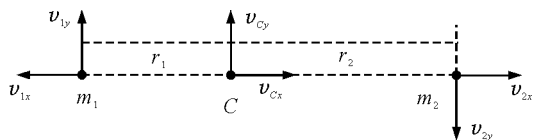


图 1

小球 1 受力

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} = G \frac{m_1 m_2}{\left(\frac{m_1 + m_2}{m_2} r_1 \right)^2} = G \frac{m_2^3}{(m_1 + m_2)^2} \frac{m_1}{r_1^2}$$

在质心参考系中可认为小球 1 受到固定在质心处等效质点 3 的万有引力作用,等效质点 3 的质量

$$m_3 = \frac{m_2^3}{(m_1 + m_2)^2}$$

在受到与距离平方成反比的有心力作用下小球 1 将做圆锥曲线运动.同理可知小球 2 的运动。

由于小球 1 到质心的距离与两小球之间的间距成比例,当两小球相距无穷远时,即小球 1 距质心(等效质点 3)无穷远,根据能量守恒,减小的动能转化为增加的势能,有

$$\frac{1}{2} m_1 (v_{1x}^2 + v_{1y}^2) - 0 = 0 - \left(-G \frac{m_1 m_3}{r_1} \right)$$

代入 v_{1x}, v_{1y}, m_3, r_1 与 r 的比例关系可得

$$v_1^2 + v_2^2 = 2G \frac{m_1 + m_2}{r}$$

当 $v_1 = v_2 = v_0, m_1 = m_2 = m_0, r = l_0$ 则

$$v_0 = \sqrt{\frac{2Gm_0}{l_0}}$$

方法 2:根据柯尼希定理——质点组的总动能(E_k)等于质点组中各质点相对于质心的动能(E'_k)与随质心整体平动的动能(E_{kC})之和.两小球系统不受外力则 E_{kC} 恒定,故在质心参考系中发生能量转化的只有质点组中各质点相对于质心的动能 E'_k 和引力势能。

在质心参考系中根据能量守恒,有

$$\frac{1}{2}m_1(v_{1x}^2 + v_{1y}^2 + v_{2x}^2 + v_{2y}^2) - 0 = 0 - \left(-G \frac{m_1 m_2}{r}\right)$$

代入 $v_{1x}, v_{1y}, v_{2x}, v_{2y}, m_3, r_1$ 与 r 的比例关系同样有

$$v_1^2 + v_2^2 = 2G \frac{m_1 + m_2}{r}$$

解法 2:非惯性参考系法

解题思路:以另一小球为非惯性参考系引入惯性力,分析小球相对非惯性系中受力,确定小球相对于非惯性系的运动特点,转化后运用牛顿运动定律或能量守恒求小球相对于非惯性系的位移.

方法 1:以小球 2 为非惯性参考系,小球 1 受力

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} + m_1 a_2$$

其中

$$a_2 = G \frac{m_1}{r^2}$$

则

$$F = G \frac{m_1(m_1 + m_2)}{r^2}$$

小球 1 受到与距离平方成反比的有心力作用,将以小球 2 为中心做圆锥曲线运动,中心质点的等效质量为 $m_1 + m_2$.

根据能量守恒,减小的动能转化为增加的势能,

有

$$\frac{1}{2}m_1 v_{12}^2 - 0 = 0 - \left[-G \frac{m_1(m_1 + m_2)}{r}\right]$$

其中小球 1 相对于小球 2 的相对速度为

$$v_{12} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

代入 v_{12} 同样有

$$v_1^2 + v_2^2 = 2G \frac{m_1 + m_2}{r}$$

方法 2:以小球 2 为非惯性参考系,以小球 1 为研究对象根据牛顿运动定律有

$$F + m_1 a_2 = m_1 a_{12}$$

其中

$$a_2 = \frac{F}{m_2}$$

则

$$F = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} a_{12}$$

在只有万有引力的作用下小球 1 相对于固定不动小球 2 做圆锥曲线运动,小球 1 的等效质量为

$$m' = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

根据能量守恒,减小的动能转化为增加的势能,有

$$\frac{1}{2}m' v_{12}^2 - 0 = 0 - \left(-G \frac{m_1 m_2}{r}\right)$$

代入 m', v_{12} 同样有

$$v_1^2 + v_2^2 = 2G \frac{m_1 + m_2}{r}$$

(上接第 66 页)

L_2 在两个大天体的连线上,且在较小的天体外侧,根据开普勒第三定律,一个物体与太阳的距离越远,它的周期越长,但地球对它的引力减小了它的轨道周期,因此在 L_2 点上,轨道周期变得与地球的轨道周期相同.

(2)“嫦娥二号”为什么选择飞向“ L_2 拉格朗日点”

在 L_2 点,受太阳和地球两大天体的引力作用,卫星将与日、地保持相对静止状态,航天器可以用最少的燃料,做最大限度的长时间飞行. L_2 点通常用于放置空间天文台,因为这里背对太阳和地球,时刻处于地球的阴影之中,而且两点一线非常容易进行位置校准. 另外在太阳活动活跃期的时候,面对猛烈

的太阳风暴,这里还有地球持续了数十亿年的磁场当盾牌,因此这里是深空探测的天堂.

日地系统的“ L_2 拉格朗日点”是近来国际空间探索的热门,从 2001 年开始,多个航天器通过这里进行天文观测,欧美获得了一些前所未有的宇宙深处天文观测结果,嫦娥二号成功到达这里以后,它将为我国以后的深空探测打下良好的基础.

参考文献

- 1 张恒谦. 奇妙的拉格朗日点. 中学物理教学参考, 2011(10):29 ~ 30
- 2 周小奋. 拉格朗日探秘. 物理教学, 2012(3):53 ~ 54
- 3 冯建跃. 谈谈拉格朗日点. 物理教师, 2012(12):63 ~ 64