

例谈复合场中的守恒量

涂德新

(江西师范大学附属中学 江西 南昌 330046)

(收稿日期:2015-12-02)

摘要:通过对3个复合场中守恒量的寻找和处理,体现某些物理量的特点,直观展示物理变化过程中的规律,这对我们平时分析和研究物理问题或许有一定的借鉴.

关键词:微分 复合场 洛伦兹力 守恒量

动量守恒定律、角动量守恒定律和能量守恒定律是物理学中的三大守恒定律.守恒定律不仅适用于宏观物体的运动,也适用于微观粒子的运动;不仅适用于低速物体的运动,也适用于高速物体的运动,也就是说在牛顿运动定律不再适用的领域它们仍然有效,这已经为近代物理学研究的大量实践所证明.守恒定律中的守恒量是对物理现象最简洁的表述,笔者发现在一些复合场(重力场、电场、磁场等)中,带电粒子的运动也有一些守恒量,下面通过几个情景的分析和处理初步研究此问题.

情景1:一电容器左右极板间电压为 u ,极板间距为 d ,速度为零的电子(质量为 m ,电荷量为 e),由电容器左极板的小孔 O 处,在电场力的作用下加速,同时在垂直纸面向外的匀强磁场 B 的作用下偏转.

问题:求电子不能到达右极板时匀强磁场 B 的最小值.

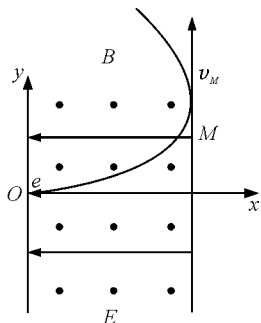


图1

解析:如图1所示,假设图中电子的一条运动轨

迹正好与右极板相切,此时所对应的匀强磁场 B 的值就是本题所求的最小值.

在此轨道上任取一点 (x, y) ,写出 y 方向的动力学方程.

注意到洛伦兹力在 y 方向的分力是由 x 方向的分速度引起的,即

$$ma_y = ev_x B \quad (1)$$

同时

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} \quad (2)$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} \quad (3)$$

由式(1)~(3)得

$$\frac{d(mv_y - eBx)}{dt} = 0$$

这就得到了一个守恒量 $mv_y - eBx$.

联系初始点和与右极板相切的点 M ,写出方程

$$0 = mv_M - eBd \quad (4)$$

利用电场力做功,得到 v_M 满足的关系式

$$eu = \frac{1}{2}mv_M^2 \quad (5)$$

由式(4)、(5)可得

$$B = \frac{1}{d} \sqrt{\frac{2mu}{e}}$$

情景2:如图2所示,半径分别为 a 和 b ($a < b$) 的两金属圆筒同轴放置于垂直纸面向外的匀强磁场

B 中, 磁场方向平行于轴线, 在两筒间存在径向电场, 方向指向内圆筒, 两筒间电压为 u . 自内筒表面发出的无初速度电子(质量为 m , 电荷量为 e), 在电场力的作用下加速飞向外筒, 而磁场的存在使电子的运动方向发生偏转, 甚至有可能使电子到不了外筒.

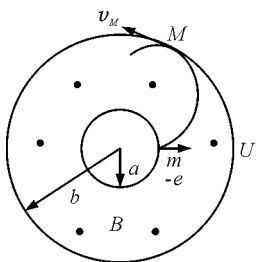


图 2

问题: 电子刚好到不了外筒, 求此时磁感应强度 B 的值.

解析: 对电子写出角动量定理

$$F_{\theta}r = \frac{d(mrv_{\theta})}{dt} \quad (6)$$

在电子的轨道上任取一点, 该点离柱轴的距离为 r , 洛伦兹力存在角向分力, 这个分力是由电子的径向速度引起的, 即

$$F_{\theta} = ev_r B$$

相应的力矩为

$$F_{\theta}r = ev_r Br \quad (7)$$

由式(6)、(7)得

$$ev_r Br = \frac{d(mrv_{\theta})}{dt} \quad (8)$$

注意到

$$rv_r = r \frac{dr}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d(r^2)}{dt} \quad (9)$$

联立(8)、(9)可得

$$\frac{d\left(\frac{1}{2}eBr^2 - mrv_{\theta}\right)}{dt} = 0$$

这就得到了一个守恒量 $\frac{1}{2}eBr^2 - mrv_{\theta}$.

联系最初的出发点与相切点 M , 可得

$$\frac{1}{2}eBa^2 = \frac{1}{2}eBb^2 - mbv_M \quad (10)$$

利用电场力做功, 得到 v_M 满足的关系式

$$eu = \frac{1}{2}mv_M^2 \quad (11)$$

由式(10)、(11)可得

$$B = \frac{2b}{b^2 - a^2} \sqrt{\frac{2mu}{e}}$$

情景 3: 如图 3 所示, 带电粒子进入介质, 受到与它的速度方向相反且成正比的阻力作用, 在粒子停下来时, 通过的距离 $l = 10$ cm. 如果在介质中有跟粒子进入速度方向相垂直的匀强磁场, 而粒子仍以原来的速度进入介质, 停止时与入射点相距 $l_1 = 6$ cm.

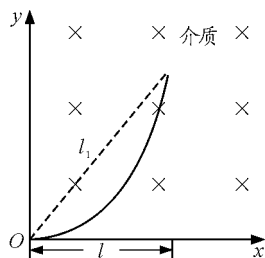


图 3

问题: 如果磁感应强度 B 减弱为一半, 那么该粒子应停在离入射点多远处?

解析: 设带电粒子在介质中受到的阻力为 $f = -kv$ (k 为正的常量), 无磁场时, 对带电粒子写出牛顿第二定律

$$m \frac{dv}{dt} = -kv \quad (12)$$

注意到

$$v = \frac{dx}{dt} \quad (13)$$

由式(12)、(13)得

$$\frac{d(mv + kx)}{dt} = 0$$

得到一个守恒量 $mv + kx$.

联系最初和最终有

$$mv_0 = kl$$

于是

$$l = \frac{mv_0}{k} \quad (14)$$

有磁场时写出牛顿第二定律

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -k\mathbf{v} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (15)$$

由式(15) 写出 x, y 方向的分量方程

$$m \frac{dv_x}{dt} = -kv_x - qv_y B \quad (16)$$

$$m \frac{dv_y}{dt} = -kv_y + qv_x B \quad (17)$$

注意到

$$v_x = \frac{dx}{dt} \quad (18)$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} \quad (19)$$

由式(16) ~ (19) 得

$$\frac{d(mv_x + kx + qBy)}{dt} = 0 \quad (20)$$

$$\frac{d(mv_y + ky - qBx)}{dt} = 0 \quad (21)$$

由式(20) 和(21) 可得守恒量

$$mv_x + kx + qBy$$

以及

$$mv_y + ky - qBx$$

联系最初和最终有

$$mv_0 = kx + qBy \quad (22)$$

$$0 = ky - qBx \quad (23)$$

由式(22) 及式(23) 可以解得

$$x = \frac{ky}{qB} \quad (24)$$

$$y = \frac{mv_0 qB}{k^2 + (qB)^2} \quad (25)$$

同时距离

$$l_1 = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (26)$$

由式(14)、(24) ~ (26) 可得

$$l_1 = \frac{l}{\sqrt{1 + \left(\frac{qB}{k}\right)^2}} \quad (27)$$

同理,磁感应强度 B 减半时有

$$l_2 = \frac{l}{\sqrt{1 + \left(\frac{qB}{2k}\right)^2}} \quad (28)$$

联立式(27)、(28) 可以求解得

$$l_2 = 8.3 \text{ cm}$$

可以分析到 3 种情况下轨迹的长度是一样的,原因是均只有阻力做功.

小结:物理学家在研究一些待认识的问题时,常常是想方设法找到所研究的现象中是否存在某种不变量,即某些物理量是守恒的情况,并总结出动量、角动量和能量的守恒定律.

我们在研究物理情景和物理问题时,也可以发现一些守恒量,只要过程满足一定的条件,就可以不必考虑过程中的细节,而对系统的初末状态的某些物理量作出某种结论,这是守恒量的特点,也是它们的优点.

Talking about the Case of Conservation Quantities in the Compound Fields

Tu Dexin

(Affiliated High School of Jiangxi Normal University, Nanchang, Jiangxi 330046)

Abstract: In this paper, based on the three compound field keep constant finding and treatment, reflect the characteristics of certain physical quantities, intuitive display of a physical change in the rules, which we usually analysis and research on the physics problem may have certain reference.

Key words: differential; compound field; Lorentz force; conservation quantity