第 32 届全国中学生物理竞赛试题分析

—— 让我们重温“拉格朗日点”

杨德云

（江苏省六合高级中学　江苏 南京　211500）

（收稿日期:2015 - 12 - 08）

摘　要:我们知道,“拉格朗日点”是指在两大物体引力作用下,能够使小物体稳定的点,本文中举出的一道中学生物理竞赛题,正是涉及的这一问题.

关键词:中学生　物理竞赛　拉格朗日点

【原题】2011 年 8 月中国发射的宇宙飞船“嫦娥二号”在完成探月任务后,首次从绕月轨道飞向日地延长线上的拉格朗日点,在该点,“嫦娥二号”和地球一起同步绕太阳做圆周运动. 已知太阳和地球的质量分别为 M_s 和 M_e,日地距离为 R. 该拉格朗日点离地球的距离 x 满足的方程为______,由此解得 $x \approx$ ______.［已知当 $\lambda \ll 1$ 时,$(1+\lambda)^n \approx 1+n\lambda$］

解答:太阳对地球的万有引力提供向心力

$$G\frac{M_sM_e}{R^2}=M_e\omega^2R$$

“嫦娥二号”飞船受到太阳和地球引力的合力提供向心力

$$G\frac{M_sm}{(R+x)^2}+G\frac{M_em}{x^2}=m\omega^2(R+x)$$

结合上两式可得

$$\frac{M_s}{(R+x)^2}+\frac{M_e}{x^2}=\frac{M_s}{R^3}(R+x)$$

由上式可得第 2 问的解答过程如下

$$\frac{M_s}{(R+x)^3}+\frac{M_e}{x^2(R+x)}=\frac{M_s}{R^3}$$

根据当 $\lambda \ll 1$ 时,$(1+\lambda)^n \approx 1+n\lambda$,变形后可得

$$\frac{M_s}{\left(1+\dfrac{x}{R}\right)^3R^3}+\frac{M_e}{x^2\left(1+\dfrac{x}{R}\right)R}=\frac{M_s}{R^3}$$

$$\frac{M_s}{\left(1+3\dfrac{x}{R}\right)R^3}+\frac{M_e}{x^2\left(1+\dfrac{x}{R}\right)R}=\frac{M_s}{R^3}$$

等式两边同乘以 $\left(1+3\dfrac{x}{R}\right)$ 可得

$$\frac{M_s}{R^3}+\frac{M_e\left(1+3\dfrac{x}{R}\right)}{x^2\left(1+\dfrac{x}{R}\right)R}=\frac{M_s}{R^3}\left(1+3\frac{x}{R}\right)$$

移项后得

$$\frac{M_e\left(1+3\dfrac{x}{R}\right)}{x^2\left(1+\dfrac{x}{R}\right)R}=\frac{M_s}{R^3}\cdot 3\frac{x}{R}$$

因 $\dfrac{x}{R}\ll 1$,消去 $\left(1+\dfrac{x}{R}\right)$ 和 $\left(1+3\dfrac{x}{R}\right)$ 可得

$$\frac{M_e}{x^2R}=\frac{M_s}{R^3}\cdot 3\frac{x}{R}$$

$$3M_sx^3=M_eR^3 \qquad x=\left(\frac{M_e}{3M_s}\right)^{\frac{1}{3}}R$$

（1）“嫦娥二号”在哪个“拉格朗日点”上

“拉格朗日点”指在两大物体引力作用下,能够使小物体稳定的点. 如图 1 所示,一个小物体在两个大物体的引力作用下在空间中的一点,在该点处,小物体相对于两大物体基本保持静止,其中的 3 个点 L_1,L_2 和 L_3 在 1767 年由数学家欧拉根据旋转的二体引力场推算出,另外两个点 L_4 和 L_5 在 1772 年由数学家拉格朗日推算出,“嫦娥二号”处在 L_2 点上.

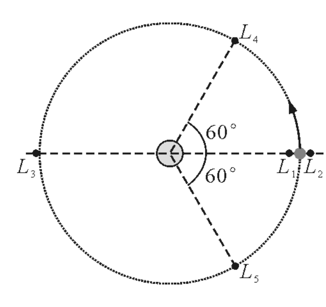

图 1

（下转第 68 页）

在质心参考系中根据能量守恒，有

$$\frac{1}{2}m_1(v_{1x}^2+v_{1y}^2+v_{2x}^2+v_{2y}^2)-0=$$

$$0-\left(-G\frac{m_1m_2}{r}\right)$$

代入 v_{1x}，v_{1y}，v_{2x}，v_{2y}，m_3，r_1 与 r 的比例关系同样有

$$v_1^2+v_2^2=2G\frac{m_1+m_2}{r}$$

解法 2：非惯性参考系法

解题思路：以另一小球为非惯性参考系引入惯性力，分析小球相对非惯性系中受力，确定小球相对于非惯性系的运动特点，转化后运用牛顿运动定律或能量守恒求小球相对于非惯性系的位移.

方法 1：以小球 2 为非惯性参考系，小球 1 受力

$$F=G\frac{m_1m_2}{r^2}+m_1a_2$$

其中

$$a_2=G\frac{m_1}{r^2}$$

则

$$F=G\frac{m_1(m_1+m_2)}{r^2}$$

小球 1 受到与距离平方成反比的有心力作用，将以小球 2 为中心做圆锥曲线运动，中心质点的等效质量为 m_1+m_2.

根据能量守恒，减小的动能转化为增加的势能，有

$$\frac{1}{2}m_1v_{12}^2-0=0-\left[-G\frac{m_1(m_1+m_2)}{r}\right]$$

其中小球 1 相对于小球 2 的相对速度为

$$v_{12}=\sqrt{v_1^2+v_2^2}$$

代入 v_{12} 同样有

$$v_1^2+v_2^2=2G\frac{m_1+m_2}{r}$$

方法 2：以小球 2 为非惯性参考系，以小球 1 为研究对象根据牛顿运动定律有

$$F+m_1a_2=m_1a_{12}$$

其中

$$a_2=\frac{F}{m_2}$$

则

$$F=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}a_{12}$$

在只有万有引力的作用下小球 1 相对于固定不动小球 2 做圆锥曲线运动，小球 1 的等效质量为

$$m'=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$$

根据能量守恒，减小的动能转化为增加的势能，有

$$\frac{1}{2}m'v_{12}^2-0=0-\left(-G\frac{m_1m_2}{r}\right)$$

代入 m'，v_{12} 同样有

$$v_1^2+v_2^2=2G\frac{m_1+m_2}{r}$$

（上接第 66 页）

L_2在两个大天体的连线上，且在较小的天体外侧，根据开普勒第三定律，一个物体与太阳的距离越远，它的周期越长，但地球对它的引力减小了它的轨道周期，因此在 L_2 点上，轨道周期变得与地球的轨道周期相同.

(2)“嫦娥二号”为什么选择飞向“L_2拉格朗日点”

在 L_2点，受太阳和地球两大天体的引力作用，卫星将与日、地保持相对静止状态，航天器可以用最少的燃料，做最大限度的长时间飞行. L_2 点通常用于放置空间天文台，因为这里背对太阳和地球，时刻处于地球的阴影之中，而且两点一线非常容易进行位置校准. 另外在太阳活动活跃期的时候，面对猛烈的太阳风暴，这里还有地球持续了数十亿年的磁场当盾牌，因此这里是深空探测的天堂.

日地系统的“L_2拉格朗日点”是近来国际空间探索的热门，从 2001 年开始，多个航天器通过这里进行天文观测，欧美获得了一些前所未有的宇宙深处天文观测结果，嫦娥二号成功到达这里以后，它将为我国以后的深空探测打下良好的基础.

参 考 文 献

1　张恒谦. 奇妙的拉格朗日点. 中学物理教学参考，2011(10)：29 ～ 30

2　周小奋. 拉格朗日探秘. 物理教学，2012(3)：53 ～ 54

3　冯建跃. 谈谈拉格朗日点. 物理教师，2012(12)：63 ～ 64