关于泊肃叶定律的适用范围和定律的修正的讨论

路　阳

（北京农学院基础教学部　北京　102206）

（收稿日期:2015 - 10 - 13）

摘　要:通过对比两种不同的泊肃叶定律的推导方法,澄清了关于泊肃叶定律众说不一的适用范围问题.指明将泊肃叶公式中计算流量时的压强视为广义压强,则泊肃叶定律既适用于水平直圆管的流量计算,也适用于非水平直圆管的流量计算.并指出关于泊肃叶定律的修正中存在的问题.

关键词:泊肃叶定律　适用范围　修正

1　引言

泊肃叶定律是大学物理学中流体力学部分的重点内容之一,它给出了不可压缩的粘性流体运动时的流量计算公式,故泊肃叶定律也称为泊肃叶公式.

关于泊肃叶定律的适用范围大多数大学物理教材[1~6]叙述为适用于水平直圆管中不可压缩的粘性流体的流量计算;一些文献[7,8]中更强调该定律只适用于水平直圆管的粘性流体的流量计算;也有文献[9,10]指出对泊肃叶公式进行修正,则可使该公式适用于水平和非水平直圆管的粘性流体的流量计算;但有的文献[11]认为泊肃叶公式既适用于水平直

次的教学中,我们可以降低课程的深度和难度,较复杂的公式推导可以不做要求,重点放在物理知识的应用上.

以流体力学中“泊肃叶定律”这一小节的内容为例,针对 A 层次的学生,我们不仅要求他们会独立推导实际流体流速的函数,还可以根据流速分布情况采用微积分的思想得到泊肃叶公式,并且能利用泊肃叶公式解释生物学中的一些现象.而对于 B 层次的学生,我们不要求他们掌握公式的推导过程,只要求他们了解泊肃叶公式,知道管道的微小变化就会对流量产生较大的影响即可.

3　结束语

总之,在农业院校大学物理教学中正确地运用分层次教学法,实行不同专业教学内容分层次、不同专业教学实例分层次、同一专业教学要求分层次,在有限的教学学时内,在保持物理学原有体系基础上,兼顾学生专业,真正实现因材施教,提高教学质量.教学实践表明,分层次教学在农业院校大学物理课程中,有效地调动了学生学习的主动性和积极性,激发了学生学习大学物理的兴趣.

参 考 文 献

1　宋伟.关于力学课程教学方法的几点探讨.合肥师范学院学报,2010,28(3):46 ～ 48

2　教育部高等学校物理学与天文学教学指导委员会物理基础课程教学指导分委会.理工科类大学物理课程教学基本要求.北京:高等教育出版社,2010.1 ～ 5

3　周宗立,黎珉.针对农林专业的物理教学方法探讨.科教文汇(下旬刊),2012(8):129 ～ 130

4　周静娴.物理学.北京:中国农业出版社,2002.1 ～ 10

5　陈飞明,黄熙,郭健勇.大学物理分层次教学的典型模式及对比分析.武汉科技学院学报,2010,23(4):44 ～ 47

6　许杰.高等农林院校大学物理分层次教学的应用研究.长春师范学院学报(自然科学版),2008,27(1):130 ～ 133

7　张卫华.工科大学物理分层次教学模式探索.科技信息,2011(27):177

圆管也适用于非水平直圆管.

对于上述资料中提到的泊肃叶定律莫衷一是的适用范围问题,本文用该定律的不同的推导方法加以解释,给出了泊肃叶定律的明确的适用范围及其成立的条件.本文也对一些资料[12,13]中提到的泊肃叶公式的修正进行了讨论,指出其中存在的问题.

2 对泊肃叶定律适用范围的讨论

关于泊肃叶定律的适用范围各种资料说法不一,这与定律的推导方法密切相关.下面本文分别采用不同的推导方法,将它们进行对比,给出明确的泊肃叶定律的适用范围.

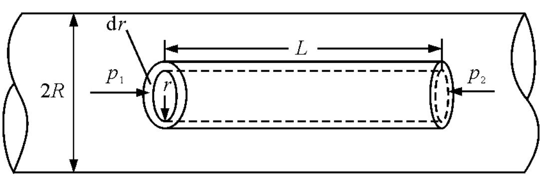

图 1

推导方法 1:如图 1 所示,在水平放置的半径为 R 的直圆管中有不可压缩的粘性流体做层流运动.在管中选取与管同轴的长度为 L,半径为 r,厚度为 dr 的圆管状流体元,对该流体元进行受力分析.该流体元受到来自内层与流动方向相同的内摩擦力 F 和来自外层与流动方向相反的内摩擦力 $F+dF$,设流体元的流速为 v,则根据牛顿粘滞定律有

$$F=-2\pi rL\eta\frac{dv}{dr} \tag{1}$$

$$dF=-2\pi L\eta\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right)dr \tag{2}$$

上式中 η 为流体的粘滞系数.设流体元两端的压强分别为 p_1 和 p_2,该压强差对应的力为 $2\pi rdr(p_1-p_2)$.当流体元处于匀速流动状态时(一些教材将匀速流动叙述为稳定流动),作用在流体元上的压强差对应的力等于摩擦力,流体元受到了平衡力的作用,即

$$2\pi rdr(p_1-p_2)+2\pi L\eta\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right)dr=0 \tag{3}$$

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right)dr=-\frac{p_1-p_2}{L\eta}rdr$$

将上式积分,得出

$$r\frac{dv}{dr}=-\frac{p_1-p_2}{2L\eta}r^2+c$$

在 $r=0$ 时,上式也成立,故 $c=0$.则有

$$\frac{dv}{dr}=-\frac{p_1-p_2}{2L\eta}r$$

再同时对上式两边积分

$$\int_v^0 dv=\int_r^R -\frac{p_1-p_2}{2L\eta}rdr$$

得出

$$v=\frac{p_1-p_2}{4\eta L}(R^2-r^2) \tag{4}$$

式(4)给出了水平直圆管中半径为 r 的流层的流动速度,由此式可以得出在半径为 R,长度为 L 的水平直圆管中粘性流体做层流时的流量 Q 为

$$Q=\int_0^R v2\pi rdr=\frac{\pi R^4}{8\eta L}(p_1-p_2) \tag{5}$$

式(5)给出的流量表达式即泊肃叶公式.

式(5)是在水平管的模型下推导出来的,p_1 和 p_2 表示长度为 L 的水平管两端受到的流体压强.根据该推导方法,一些教材和文献中将泊肃叶定律的适用范围界定为水平直圆管的粘性流体做层流时的流量计算公式.

下面我们换一种方法推导泊肃叶定律.

推导方法 2:图 2 给出的是半径为 R 的直圆管,其轴线与水平面成任意角.管中有不可压缩的粘性流体做层流运动.在管中选取与管同轴的半径为 r,厚度为 dr 的单位长度的圆管状流体元,对该流体元流动中的功能关系进行分析.

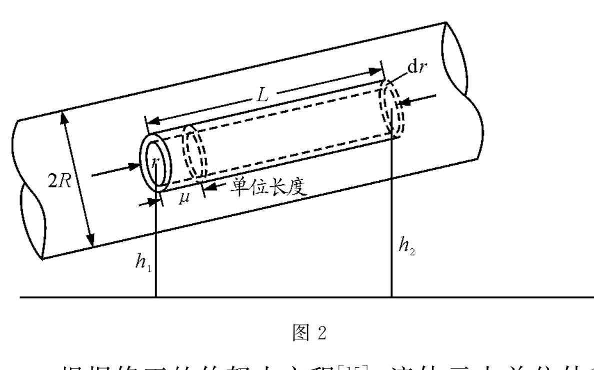

图 2

根据修正的伯努力方程[15],流体元中单位体积的流体在始末位置处的总能量有如下关系

$$p_1+\frac{1}{2}\rho v_1^2+\rho g h_1=$$
$$p_2+\frac{1}{2}\rho v_2^2+\rho g h_2+w \tag{6}$$

式(6)中角标1,2分别表示流体元的初始位置和末位置,p 代表流体压强,ρ 表示流体密度,v 是流动速度,h 是流体元相对重力势能零势能面的高度,w 是单位体积的流体流动中损耗的能量.当管中流体做定常流动,且圆管状流体元各处粗细均匀,根据流体连续性原理,有 $v_1=v_2$.式(6)可整理为

$$w=(p_1-p_2)+\rho g(h_1-h_2)=$$
$$(p_1+\rho g h_1)-(p_2+\rho g h_2) \tag{7}$$

流体元在始末位置间损耗的总能量为

$$E=w2\pi r\mathrm{d}r$$

设流体元在始末位置间流过的距离为 L,该流体元受到来自内层与流动方向相同的内摩擦力

$$F=-2\pi r\eta\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}$$

和来自外层与流动方向相反的内摩擦力 $F+\mathrm{d}F$,则摩擦力对流体元做的总功 W 为

$$W=\mathrm{d}F\cdot L=-2\pi\eta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right)\mathrm{d}r\cdot L \tag{8}$$

根据功能原理,流体元在流动中损耗的总能量等于其流动中受到的摩擦力做的总功.于是有

$$E=W$$
$$w2\pi r\mathrm{d}r=-2\pi\eta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right)\mathrm{d}r\cdot L \tag{9}$$

式(9)整理为

$$-\frac{w}{\eta L}r\mathrm{d}r=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right)$$

对上式两边积分,考虑到 $r=0$ 时的条件,得到

$$v=\frac{w}{4\eta L}(R^2-r^2) \tag{10}$$

式(10)是直圆管中半径为 r 的流层的流动速度,由此式可以得出半径为 R,长度为 L 的直圆管中粘性流体做层流时的流量 Q 为

$$Q=\int_0^R v2\pi r\mathrm{d}r=\frac{\pi R^4}{8\eta L}w \tag{11}$$

将式(7)代入式(11),得到

$$Q=\frac{\pi R^4}{8\eta L}[(p_1+\rho g h_1)-(p_2+\rho g h_2)] \tag{12}$$

将式(12)中($p+\rho g h$)视为广义压强[14],即流体压强与单位体积流体的重力势能之和,用符号 p' 表示广义压强,式(12)可改写为

$$Q=\frac{\pi R^4}{8\eta L}(p_1'-p_2') \tag{13}$$

式(13)给出了与水平方向成任何角度的直圆管中不可压缩粘性流体做层流时的流量计算公式,式中的压强项为广义压强.当直圆管水平放置时,流体运动过程中重力势能不变,式(13)中的广义压强之差 $p_1'-p_2'$ 就等于流体压强之差 p_1-p_2,此时式(13)与式(5)完全一致.

由两种推导方法的对比可以看出,只要将泊肃叶定律中的压强项视为广义压强,则该定律既适用于水平状态的直圆管的流量计算也适用于非水平状态的直圆管的流量计算.

在泊肃叶定律的推导过程中,我们可以总结出该定律成立的条件:

(1)流体为不可压缩的粘性流体

满足此前提才能在推导中应用修正的伯努力方程.

(2)流体的运动形式为层流,且各流层为匀速运动

层流条件使推导时可以应用牛顿粘滞定律,各流层匀速运动满足了流层受力平衡和粗细均匀流管中连续性原理的要求.

(3)流管为无限长直圆管

无限长假设就是管的长度远大于管的内径,该假设可使流量计算中忽略边缘效应.直圆管假设保证流层形状为圆管形.

我们在应用泊肃叶公式时,必须满足它成立的条件.

3 对泊肃叶定律修正的讨论

文献[12,13]指出在水平直圆管中推导泊肃叶公式时,是将管两端的流体压强之差与流动中的粘滞阻力互相抵消.他们认为此种做法忽略了流体在管中流动时的动能也是由于流体压强差的作用才获得的,因此克服粘滞阻力的有效流体压强差比管两

端的流体压强之差要小一些.修正后的水平直圆管中的泊肃叶公式为

$$Q=\frac{\pi R^4}{8\eta L}(p_1-p_2-\Delta p)$$

文献对损耗在动能上的流体压强Δp 进行了推导.

笔者认为资料中提到的修正项Δp 不存在.泊肃叶定律给出的是流管中某一段区域(长度为L)的流量表达式.流体在进入该区域之前已经获得了一定的动能,该动能可能来自于流体压强差的作用,也可能来自于流体压强差与流体重力势能之差和起来的作用.在区域L 中运动时,只要流体的压强差或广义压强之差完全抵消掉流动中的粘滞阻力,则该区域中的流体就可以保持各层流速不变的匀速运动,不需要在动能上消耗流体的压强.因此在直圆管中应用泊肃叶定律不需要进行修正.

参 考 文 献

1 梁路光,赵大源.医用物理学.北京:高等教育出版社,2004.47 ~ 48

2 喀蔚波.医用物理学(第 2 版).北京:高等教育出版社,2008.51 ~ 52

3 胡玉才,李玉侠.大学物理学基本原理及生物效应.北京:中国农业出版社,2004.29 ~ 30

4 周静娴.物理学.北京:中国农业出版社,2002.10

5 金仲辉,申兵辉.大学物理简明教程.北京:中国农业大学出版社,2007.15 ~ 16

6 金仲辉,柴丽娜.大学基础物理学.北京:科学出版社,2010.57 ~ 58

7 黄慰怀.泊肃叶公式的适用条件.中国大学教育,1992(1)

8 阮萍.对泊肃叶定律应用的讨论.华夏医学,1999(3):268 ~ 269

9 秦任甲.泊肃叶公式在非水平管中的形式及其在粘滞系数测定中的应用.大学物理,1983(12):1 ~ 3

10 黄龙洙.关于粘滞流体层流流量公式的讨论.大学物理,1990(1):42 ~ 43

11 潘百年.物理学(供药学专业用).北京:中国医药科技出版社,2000.13 ~ 14

12 杨述武.普通物理实验(一.力学、热学部分)(第 2 版).北京:高等教育出版社,1993.233

13 巴哈提古丽·阿斯里别克,张里荃,孙迎春.毛细管两端压强差对液体粘度测量的影响.大学物理实验,2011(6):12 ~ 13

14 周光炯,严宗毅,许世雄,等.流体力学(第 2 版)(下册).北京:高等教育出版社,2000.54 ~ 55

Discussion on the Applicable Scope of Poiseuille Law and Its Modification

Lu Yang

(Basic Department of Beijing University of Agriculture, Beijing 102206)

Abstract: This paper is aimed to define the applicable scope of Poiseuille law by using different derivation methods. When the pressure in Poiseuille formula is regarded as generalized pressure, Poiseuille law can be used to solve flow of viscous fluid in horizontal or non-horizontal straight round tube. The inappropriate modification of Poiseuille law is discussed in this paper.

Key words: Poiseuille law; the applicable scope; modification