替换电阻 简化电路*

陈龙法

（石狮市第一中学　福建 泉州　362700）

（收稿日期:2015－12－04）

摘　要:对于某些复杂电路,用串联或并联的两个电阻替换电路中的某个电阻,能有效地简化复杂电路,可简便计算等效电阻等有关问题.

关键词:替换电阻　串联替换　并联替换　简化电路

等效替换是一种重要的物理方法.在解决某些复杂电路问题时,可将电路中的某个电阻用串联或并联的两个电阻来替换,能有效地简化复杂电路,计算等效电阻,从而方便地解决问题.

1　串联替换

所谓串联替换,就是将如图 1(a) 所示的电阻 R,用串联形式的两个电阻 R_1 和 R_2 来替换,且 $R=R_1+R_2$,其中 $R_1=mR$,$R_2=(1-m)R$,m 是一个正的实数,如图 1(b) 所示.替换之后,a 与 b 两端点间的电压等于各分段电压之和.

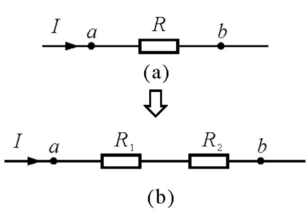

图 1

【例 1】在如图 2 所示电路中,$R_1=R_4=R_5=1\ \Omega$,$R_2=R_3=2\ \Omega$,若 a 与 b 两端点间的电压为 U,求 a 与 b 两端点间的等效电阻 R_{ab} 及 c 与 d 两端点间的电压 U_{cd}.

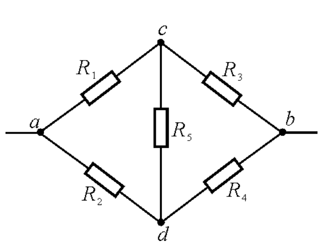

图 2

解析:本题如果仅利用一般的电阻串、并联公式,不可能计算出 R_{ab},若直接应用基尔霍夫定律则需要解多个冗长的一次方程组.

下面用替换电阻的方法来求解.

将电阻 R_2 用两个电阻 mR_2 和 $(1-m)R_2$ 串联的形式来替换,如图 3.取 c' 为 mR_2 和 $(1-m)R_2$ 的连接点,令 c' 点和 c 点电势相等.

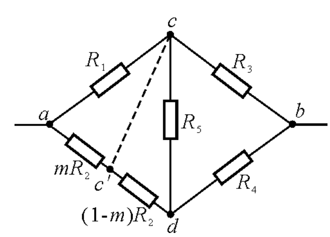

图 3

设电阻 R_1,R_2,R_3,R_4,R_5 中的电流分别为 I_1,I_2,I_3,I_4,I_5,由于电路的对称性,可以看出

$$I_1=I_4 \qquad I_2=I_3$$

由于

$$I_1R_1=mR_2I_2$$

$$I_5R_5=(1-m)R_2I_2$$

$$I_2+I_5=I_4=I_1$$

由此可得

$$\frac{mR_2}{R_1}=\frac{(1-m)R_2+R_5}{R_5}$$

解得

$$m=\frac{R_1(R_2+R_5)}{R_2(R_1+R_5)}=\frac{3}{4}$$

* 福建省教育科学“十二五”规划 2015 年度常规课题“高中物理教材二次开发案例研究”,项目编号:FJJK15－454

作者简介:陈龙法(1961－　),男,中学高级教师,主要从事高中物理教学与研究.

因而图 1 电路可等效为图 4 电路，通过串、并联计算求出

$$R_{ab}=1.4\ \Omega \qquad U_{cd}=\frac{1}{7}U$$

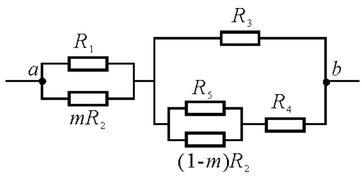

图 4

或者，不仅将电阻 R_2 替换为两个电阻 mR_2 和 $(1-m)R_2$ 串联的形式，同时也将电阻 R_3 替换为两个电阻 mR_3 和 $(1-m)R_3$ 串联的形式，这样图 1 电路可等效为图 5 的电路，通过串、并联计算可求出

$$R_{ab}=1.4\ \Omega \qquad U_{cd}=\frac{1}{7}U$$

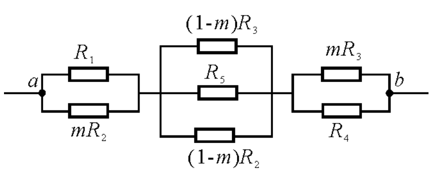

图 5

2　并联替换

所谓并联替换是将电阻 R 用并联形式的两个电阻 R_1 和 R_2 来替换，且 $\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$，其中

$$R_1=nR \qquad R_2=\frac{n}{n-1}R$$

n 是一个正的实数，如图 6. 替换之后，电阻 R 中的原电流 I 被分为两部分：通过 nR 中的为 $\frac{I}{n}$，通过 $\frac{n}{n-1}R$ 中的为 $\frac{nI}{n-1}$.

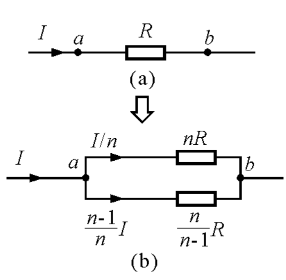

图 6

当 $n\geqslant 1$ 时，替换出的电阻 R_1 和 R_2 都是正值. 当 $n<1$ 时，替换出的电阻之一变为负值（要注意流过这部分电流应取的流向），为方便计算，可令 $p=\frac{1}{n}$，图 6 电路可等效为图 7 电路. 需要强调的是，应用替换法并不使得 a 与 b 两点的电势有任何改变，而且保持了原电流不变，即使替换出的电阻之一变为负值，a 与 b 两点间电路的总功率仍然保持不变. 即

$$\frac{U^2}{\frac{R}{p}}+\frac{U^2}{-\frac{R}{p-1}}=\frac{U^2}{R}$$

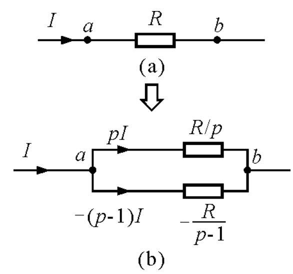

图 7

在上面例 1 的解答中应用串联替换法，将单个电阻 R_2（以及 R_3）替换为两个电阻串联的形式. 下面用两种不同的并联替换的方法解答例 1.

解法 1：在图 2 电路中，设电阻 R_1,R_2,R_3,R_4,R_5 中的电流分别为 I_1,I_2,I_3,I_4,I_5，由于电路的对称性，可以看出

$$I_1=I_4 \qquad I_2=I_3$$

因为 $I_1=I_3+I_5$，如图 8(a)，将 R_1 用并联的两个电阻 R_{11},R_{12} 来替换，且 R_{11},R_{12} 中各自流过的电流 I_{11},I_{12} 满足：

$$I_{11}=I_5 \qquad I_{12}=I_3$$

令 $R_{11}=nR_1,R_{12}=\frac{n}{n-1}R_1,\frac{I_{11}}{I_{12}}=\frac{1}{n-1}$

由 $I_2=I_3=I_{12}$ 和 a 与 d 间的电压，得出

$$I_{11}(R_{11}+R_5)=I_{12}R_2$$

所以

$$\frac{1}{n-1}=\frac{R_2}{nR_2+R_5}$$

代入电阻具体数值，得

$$n=3 \qquad R_{11}=3\ \Omega \qquad R_{12}=1.5\ \Omega$$

于是，图 2 电路可简化为等效的图 8(b) 电路.

或者，由于对称性，将 R_1 用并联的两个电阻 $R_{11}=3\ \Omega$、$R_{12}=1.5\ \Omega$ 替换的同时，将 R_4 也用并联

的两个电阻 $R_{41}=3\ \Omega$，$R_{42}=1.5\ \Omega$ 来替换，这样图 2 电路也可等效为图 8(c) 电路.

由图 8(b) 或图 8(c)，经过串、并联计算，可得

$$R_{ab}=1.4\ \Omega$$

$$U_{cd}=\frac{R_5}{R_5+R_{11}+R_{41}}U=\frac{1}{7}U$$

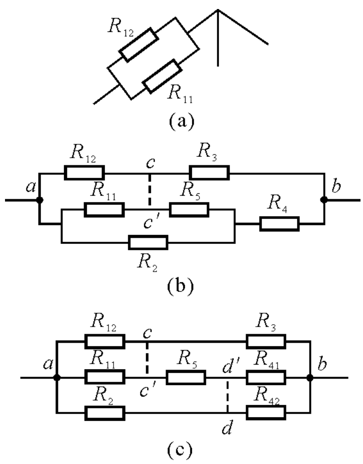

图 8

解法 2：根据 $I_1=I_4$，$I_2=I_3$，将 R_5 看成是由通有电流 I_1 的 R_{51} 和通有电流 I_2 的 R_{52} 的两个电阻并联而成，如图 9 所示. 因为电流 I_1 与电流 I_2 的流向相反，于是 $n<1$.

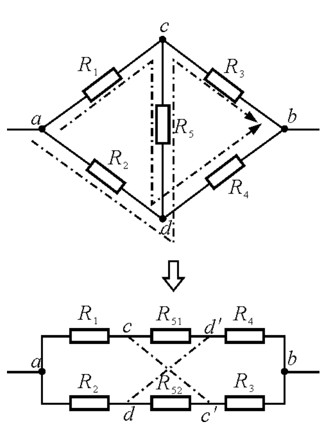

图 9

$$R_{51}=nR_5 \qquad R_{52}=\frac{n}{n-1}R_5$$

$$I_1R_{51}+I_2R_{52}=0$$

$$I_1(R_1+R_4+R_{51})=I_2(R_2+R_3+R_{52})$$

$$\frac{1}{R_{51}}+\frac{1}{R_{52}}=\frac{1}{R_5}$$

代入电阻具体数值，得

$$n=\frac{1}{3} \qquad R_{51}=\frac{1}{3}\ \Omega \qquad R_{52}=-\frac{1}{2}\ \Omega$$

$$R_{ab}=\frac{(R_1+R_{51}+R_4)(R_2+R_{52}+R_3)}{R_1+R_{51}+R_4+R_2+R_{52}+R_3}=1.4\ \Omega$$

$$U_{cd}=\frac{1}{7}U$$

3　替换电阻方法的应用

3.1　处理任意惠斯通电桥问题

【例 2】如图 10 所示的惠斯通电桥，电阻 R_1，R_2，R_3，R_4，R_5 的具体阻值未知，若流入 a 端点的电流为 I_0，求流过电阻 R_1，R_2，R_3，R_4，R_5 中的电流.

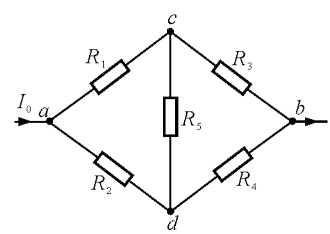

图 10

解：如图 11，将电阻 R_1 替换为两个电阻 nR_1 和 $\frac{n}{n-1}R_1$ 的并联形式，将电阻 R_4 替换为由 mR_4 和 $\frac{m}{m-1}R_4$ 两个电阻的并联形式，而且电流关系满足

$$\frac{n-1}{n}I_1=I_3$$

$$\frac{m-1}{m}I_4=I_2$$

$$\frac{1}{n}I_1=\frac{1}{m}I_4$$

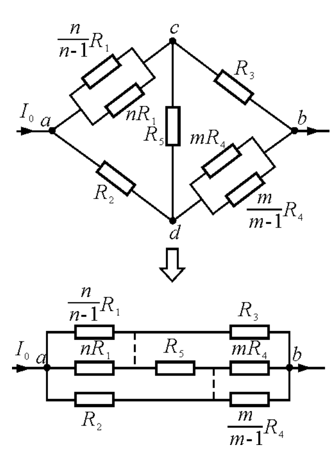

图 11

由于

$$I_5(nR_1+R_5)=I_2R_2$$

$$I_5(R_5+mR_4)=I_3R_3$$

$$I_1+I_2=I_0$$

所以 $$I_0=nI_5+(m-1)I_5$$

即 $$I_5=\frac{I_0}{n+m-1}$$

因为 $$I_2=\frac{m-1}{m}I_4=(m-1)I_5$$

$$I_3=\frac{n-1}{n}I_1=(n-1)I_5$$

或 $$mR_2-nR_1=R_5-R_2$$

$$nR_3-mR_4=R_5+R_3$$

故

$$m=\frac{R_3(R_5+R_2)+R_1(R_5+R_3)}{R_2R_3-R_1R_4}$$

$$n=\frac{R_4(R_5+R_2)+R_2(R_5+R_3)}{R_2R_3-R_1R_4}$$

当求出 m 和 n，就可知通过所有电阻的相应电流值

$$I_1=nI_0=\frac{n}{m+n-1}I_0$$

$$I_2=(m-1)I_5=\frac{n}{m+n-1}I_0$$

$$I_3=(n-1)I_5=\frac{n-1}{m+n-1}I_0$$

$$I_4=mI_5=\frac{m}{m+n-1}I_0$$

$$I_5=\frac{1}{m+n-1}I_0$$

显然，$m=n=\infty$，相当于一个平衡电桥.

因此 $$R_2R_3-R_1R_4=0$$

或 $$\frac{R_1}{R_2}=\frac{R_3}{R_4}$$

3.2　简化框架类电路

【例 3】如图 12 所示，立方体框架由 12 根相同的金属丝连接而成，每根金属丝的电阻为 r. 若电流从 A 点流入，从 B 点流出. 求 A 与 B 点间的等效电阻.

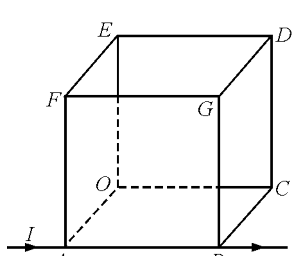

图 12

解析：由于电路的对称性，可用 I_1，I_2 和 I_3 表示出每根金属丝中的电流，如图 13 所示.

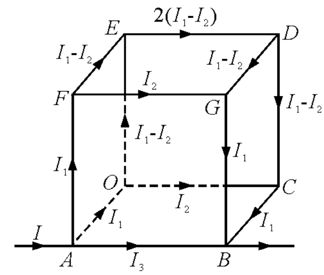

图 13

把金属丝 $\overline{ED}$ 的电阻用并联形式的两个电阻 mr 和 $\frac{m}{m-1}r$ 来替换，因为这两个电阻中对应的电流应相等，所以

$$\frac{I_{11}}{I_{12}}=\frac{1}{m-1}=1$$

即 $m=2$.

把金属丝 $\overline{AF}$ 的电阻用并联形式的两个电阻 nr 和 $\frac{n}{n-1}r$ 来替换，nr 中的电流为 I_1-I_2，$\frac{n}{n-1}r$ 中的电流为 I_2，且 $\frac{I_{11}}{I_{12}}=\frac{I_1-I_2}{I_2}=\frac{1}{n-1}$.

对金属丝 $\overline{AO}$，$\overline{CB}$，$\overline{GB}$ 的电阻作类似的替换，图 12 电路可简化为图 14 电路.

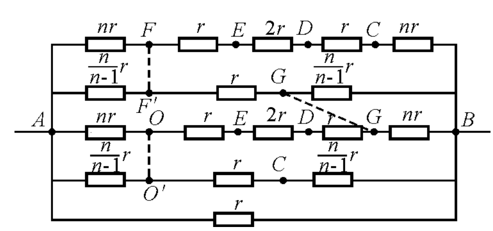

图 14

A 与 B 两点间的电压为

$$(I_1-I_2)(2nr+4r)=I_2(r+2\cdot\frac{n}{n-1}r)$$

整理得

$$(2n+4)r\cdot\frac{1}{n-1}=\frac{3n-1}{n-1}r$$

解得 $$n=5$$

于是

$$r_{11}=5r\qquad r_{12}=\frac{5}{4}r$$

根据图 14 电路，通过串、并联计算可得

$$R_{AB}=\frac{7}{12}r$$

“探究弹力与弹簧伸长量关系”实验的研究

徐正海　周传娟
（当涂第一中学　安徽 马鞍山　243100）

（收稿日期：2015－10－20）

胡克定律是中学物理教学的一个基本内容，而与其相关的“探究弹力与弹簧伸长量的关系”实验，则是高考指定的考点之一. 下面有一个备考题，其流行解答值得思考.

【题目】 在研究弹力与弹簧伸长量关系的实验中，首先将弹簧水平放置测出其自然长度，然后竖直悬挂让其自然下垂，如图 1 所示；在其下端施加外力 F（即钩码重力），实验过程是在弹簧的弹性限度内进行的. 用记录的外力 F 与弹簧伸长量 x 作出 $F-x$ 图像，如图 2 所示. 问：

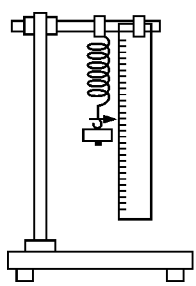

图 1

（1）弹簧的劲度系数 κ 是多少？

（2）图线不过坐标原点的原因是什么？

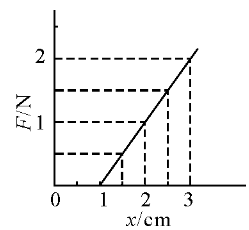

图 2

【流行解答】 因为 $F-x$ 图线的函数关系为 $F=-F_0+\kappa x=-1+100x$，而图线的斜率等于弹簧劲度系数，故 $\kappa=100$ N/m；当 $x=0$ 时，$F=-F_0$，可见 $F_0=1$ N 表达了弹簧自身的重力大小，这也是引起图线不过原点的原因.

从以上例题可以看出，用替换电阻的方法，扩展了串并联电路的概念，对简化复杂电路并进行有关计算是简便的方法. 实际上，即使电路中包含电感和电容，这个方法也是简便可行的.

附：练习（供读者练习用替换电阻方法解题参考）

练习 1：由 8 根相同的金属线连接成一个底边为正方形的等边四角形框架如图 15 所示. 每根金属线的电阻为 r，若电流自 A 点流入，求下列情况下此框架的总电阻.

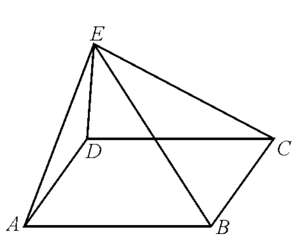

图 15

（1）电流由 B 点流出；

（2）电流由 C 点流出；

（3）电流由 E 点流出.

练习 2：三角形棱锥体 $ABCD$ 由 6 根金属导线连成，每根金属导线的电阻如图 16 所示. 求 A，B 两点间的等效电阻 R_{AB}.

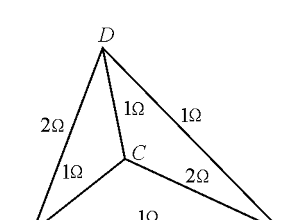

图 16

练习答案：

1.（1）$\frac{8}{15}r$；（2）$\frac{2}{3}r$；（3）$\frac{7}{15}r$.

2.$\frac{7}{12}r$