

连接体的速度能否同时达到最大

——对一道常见题的速度图像分析

陈显盈 俞美

(温州中学 浙江温州 325000)

(收稿日期:2015-10-08)

摘要:通过理论推导与分析,讨论了连接体的速度能否同时达到最大的问题.

关键词:连接体 速度 同时 最大值

有关连接体的题目是高中物理中常见的一种类型题,我们往往认为连接体中各物体的运动是同步的,如连接体中各物体的速度会同时增大或减小,速度同时达到最大值或最小值等等.那么,连接体中各物体的速度一定会同时达到最大吗?

下面以一道常见连接体题目为例,从图像角度分析各连接体的速度变化情况,研究其速度是否同时达到最大等问题,从而加深对该类连接体物理过程的理解.

这也可以从 $v-t$ 图中每个 t 内的小三角形的个数看出.

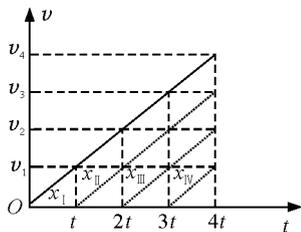


图9

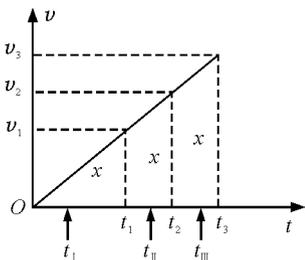


图10

对于图10,根据边长正比于面积的平方根之比可得通过前 x , 前 $2x$, 前 $3x$ 的位移所用时间的比为

$$t_1 : t_2 : t_3 = 1 : \sqrt{2} : \sqrt{3}$$

通过连续相等的位移 x 所用时间的比为

1 问题再现

【原题】如图1所示,重物 A,B,C 质量相等,A 和 B 用轻绳相连绕过光滑的小定滑轮,开始时 A,B 静止,滑轮间距为 0.6 m, MN 水平,现将物体 C 轻轻挂于 MN 中点,则 C 物体下落多大高度时速度最大? 整个过程物体 C 做什么运动?

这是一道常见的物理题目,一些文献^[1]对此题进行了解析.下面笔者从图像角度深入分析重物 A,

$$t_I : t_{II} : t_{III} = 1 : (\sqrt{2} - 1) : (\sqrt{3} - \sqrt{2})$$

6 小结

匀变速直线运动中的 5 个物理量: x, t, v_0, v, a 中任意 4 个可由一个公式联系

$$v = v_0 + at \text{ (缺 } x \text{)}$$

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \text{ (缺 } v \text{)}$$

$$x = vt - \frac{1}{2} at^2 \text{ (缺 } v_0 \text{)}$$

$$x = \frac{v + v_0}{2} t \text{ (缺 } a \text{)}$$

$$v^2 - v_0^2 = 2ax \text{ (缺 } t \text{)}$$

这 5 个公式中可以认为只有两个是独立的,其余 3 个可以通过选取的两个独立的方程导出,教科书上是选取前两个方程为独立方程.可以看出用 $v-t$ 图像法推导匀变速直线运动公式显得既简明又直观.

参考文献

- 顾琦. 漫谈一堂好课的基本特点. 物理教师, 2012, 33(8): 11 ~ 14

B、C 的速度变化情况,从而研究其速度是否同时达到最大等问题。

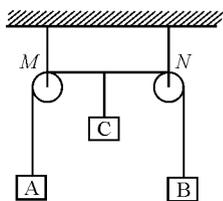


图 1

2 问题解决

2.1 公式推导

如图 2 所示,设 $MN = 2b$, 3 物体的质量都为 m 。

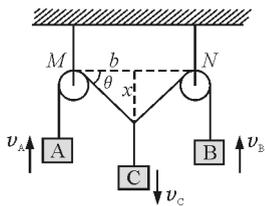


图 2

当 C 物体下降的高度为 x 时, A、B 上升的高度为

$$y = \sqrt{x^2 + b^2} - b$$

此时绳子与水平方向的夹角为 θ , 则

$$v_A = v_B = \frac{dy}{dt} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + b^2}} \frac{dx}{dt} = v_C \sin \theta$$

在运动过程中, A、B、C 总机械能守恒. 根据机械能守恒定律得

$$mgx - 2mg(\sqrt{x^2 + b^2} - b) = \frac{1}{2}m(v_A^2 + v_B^2 + v_C^2)$$

同时代入 $x = b \tan \theta$ 及 $v_A = v_B = v_C \sin \theta$ 并推导可得

$$mgb \tan \theta - 2mgb \left(\frac{1}{\cos \theta} - 1 \right) = \frac{1}{2}mv_C^2(1 + 2 \sin^2 \theta)$$

得

$$v_C = \sqrt{\frac{2gb(\sin \theta - 2 + 2\cos \theta)}{\cos \theta(1 + 2 \sin^2 \theta)}} \quad (1)$$

$$v_A = v_B = \sqrt{\frac{2gb(\sin \theta - 2 + 2\cos \theta)}{\cos \theta(1 + 2 \sin^2 \theta)}} \sin \theta \quad (2)$$

2.2 图像绘制

由式(1)、(2)可看出 A、B、C 的速度随着 θ 改变而改变, 变化情况可以利用 Mathematica 软件中的

Plot 函数描述的 $v-\theta$ 曲线来表示, 描述结果如图 3 所示(其中取 $b = 0.3 \text{ m}$, $g = 9.8 \text{ m/s}^2$). 可以看出, 在 θ 从 0 增大到 53.13° 过程中, A、B、C 的速度先从零增大到一定值后再减小到零, 但是 3 个物体的速度并不是同时达到最大值的, 其中 C 的速度一直比 A、B 的速度大且先增大到最大值, 在 $\theta = 53.13^\circ$ 时三者速度同时减小到零。

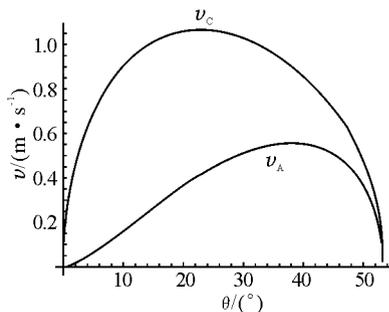


图 3

2.3 结果分析

(1) C 的速度始终不小于 A 和 B 的速度

可以看出, C 的速度始终不小于 A、B 的速度, 其中 C 的速度最大值也比 A、B 的速度最大值要大, 分别为 $v_{C\max} = 1.07 \text{ m/s}$ 和 $v_{A\max} = v_{B\max} = 0.555 \text{ m/s}$ 。

(2) C 的速度与 A、B 的速度并不同时达到最大值

当 $\theta = 22.55^\circ$ 时, C 的速度取到最大值 $v_{C\max} = 1.07 \text{ m/s}$ 。当 $\theta = 37.78^\circ$ 时, A、B 的速度取到最大值 $v_{A\max} = v_{B\max} = 0.555 \text{ m/s}$ 。可见, 连接体中各物体的速度并不一定同时达到最大。

(3) C 的速度与 A、B 的速度同时达到最小值零
当 $\theta = 0$ 或 53.13° 时, C 和 A、B 的速度同时取到最小值 $v_{A\min} = v_{B\min} = v_{C\min} = 0$ 。

(4) C 和 A、B 同时做上下往复运动

在 $\theta = 53.13^\circ$ 时三者速度同时减小到零时, 通过受力分析可知, C 受到的拉力会大于重力, 所以并不会停止在此处, 而是会开始反向上升, 速度先增大再减小, 相当于下降的逆过程. 在 $\theta = 0$ 时, 三者速度同时减小到零, 即返回到了刚开始下降的状态, 此后继续做周期性的上下往复运动。

3 问题拓展

如果改变该连接体中 C 物体的质量, 是不是一定还能保持周期性的上下往复运动呢? 此时, 各物

体的速度会不会同时达到最大呢?

3.1 公式推导

设 A, B 的质量为 m , C 的质量为 m_C , 其他条件不变, 同理可以推导出

$$v_C = \sqrt{\frac{2gb\left(\frac{m_C}{m}\sin\theta - 2 + 2\cos\theta\right)}{\cos\theta\left(\frac{m_C}{m} + 2\sin^2\theta\right)}}$$

令 $k = \frac{m_C}{m}$

则

$$v_C = \sqrt{\frac{2gb(k\sin\theta - 2 + 2\cos\theta)}{\cos\theta(k + 2\sin^2\theta)}} \quad (3)$$

$$v_A = v_B = \sqrt{\frac{2gb(k\sin\theta - 2 + 2\cos\theta)}{\cos\theta(k + 2\sin^2\theta)}} \sin\theta \quad (4)$$

3.2 图像绘制

由式(3)、(4)可看出 A, B, C 的速度不仅随着 θ 改变而改变, 而且跟 $k = \frac{m_C}{m}$ 有关. 其实, 式(1)、(2)正是取 $k = \frac{m_C}{m} = 1$ 时的情况. 下面绘制 k 取不同值时的 $v-\theta$ 曲线(其中取 $b=0.3\text{ m}$, $g=9.8\text{ m/s}^2$). 图4, 图5和图6分别是在 $k=0.5, k=2$ 和 $k=3$ 时物体下降过程中的 $v-\theta$ 曲线, 图7是在 k 取不同值时下降过程中在同一坐标中的 $v-\theta$ 曲线.

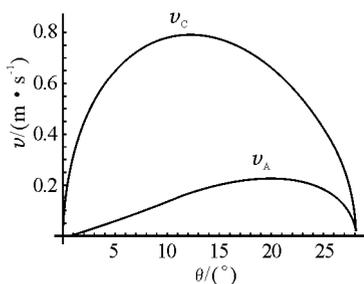


图4 $k = 0.5$

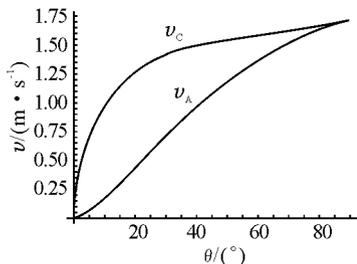


图5 $k = 2$

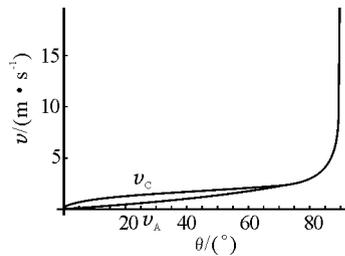


图6 $k = 3$

3.3 结果分析

从图中可以看出, k 越大, θ 的最大值也越大, 即 C 下降的距离也越大. 在 θ 相同的情况下, k 值越大, A, B, C 的速度也越大. 当 k 一定且 $k < 2$ 时, 三者速度随着 θ 的增大先增大后减小, 在中间某一 θ 值可以取到最大值, C 到最低处后能在拉力的作用下上升而做周期性的上下往复运动; 当 $k \geq 2$ 时, 三者速度随着 θ 的增大一直增大, C 所受重力一直大于所受拉力, 不会在拉力的作用下向上做周期性的上下往复运动, 而是在重力作用下一直向下运动, A, B, C 的速度会同时趋向最大值.

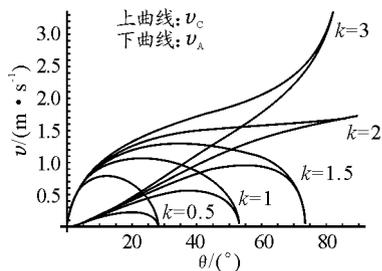


图7

总之, 对于该类连接体, A 与 B 的质量相等, 当 C 的质量小于 A 质量的 2 倍时, 各物体的速度并不会同时达到各自的最大值; 当 C 的质量不小于 A 质量的 2 倍时, 各物体的速度才会同时趋向最大值. 所以, 在做该类连接体题目时, 不能想当然地认为各物体的速度会同时达到最大值, 而要根据题意具体分析.

参考文献

1 叶玉琴. 连接体速度最大值问题的探讨. 物理教学, 2011(11):51