对容器重心位置变化的一点讨论

晏　鹏
（沭阳县沭阳高级中学　江苏 宿迁　223600）

（收稿日期:2016－03－03）

高一物理在有关重心的内容方面，很多资料上有类似于这样一道习题：将水慢慢注入一薄壁圆柱形烧杯直至水满. 在此过程中，系统（包括烧杯和水）的重心位置

A. 慢慢下降　　B. 慢慢上升

C. 先下降后上升　　D. 先上升后下降

对于这个习题的解析，资料上给出了这样的答案：如图 1 所示，在未注水时，烧杯和水的共同重心在容器的中心 O 点附近. 随着水的流入，系统的质量分布发生了变化，系统的共同重心在 O 点下方某位置 O' 点处. 当容器注满水后，系统的重心又回到了 O 点附近. 因此，系统的重心是先下降后上升. 此题正确答案为 C.

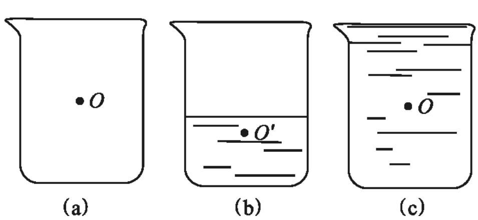

图 1

这个答案给出了系统重心变化的 3 个状态并由此得出正确的结果. 但是对于系统重心的具体变化过程，答案没有给出明确的分析. 有学生对于这个问题产生了如下疑问：

（1）系统初始状态和末状态的重心在中心点 O 附近，但在注水过程中重心位置会不会有更为复杂的变化，如：下降 — 上升 — 下降 — 上升？

（2）在水未满的过程中（如图 2），重心如何变化？重心变化和水位变化是什么关系？

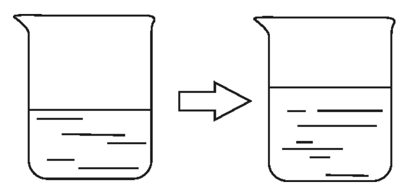

图 2

要得到系统重心具体变化过程，需要通过计算来分析重心的位置变化. 对于由多个质点组成的系统，其重心 C 点的位置坐标（x_C，y_C，z_C）由如下公式求得

$$x_C=\frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}\quad y_C=\frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}\quad z_C=\frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i}$$

此题所涉及的系统比较简单，系统重心与烧杯重心、水的重心都在一条竖直线上，如图 3 所示. 可以设坐标都在 x 轴上. 另外设系统重心为 C 点；烧杯

计”排开液体的体积也不变；但由于螺母已经从液体中取出，试管必然下沉一些以补偿螺母排开液体的体积，试管下沉的体积等于螺母的体积，故试管下沉的高度为 $\frac{V_{螺母}}{S}$，原来试管露在液面之上的高度为 h，由于下沉，现在露在液面之上的高度就只剩下 $h-\frac{V_{螺母}}{S}$ 了，因此

$$F_{浮}=\rho_{液}\, gS\left[L^*-\left(h-\frac{V_{螺母}}{S}\right)\right]=\rho_{液}\, gS\left[\left(L^*+\frac{V_{螺母}}{S}\right)-h\right]=\rho_{液}\, gS(L-h)$$

由此式就可得式（1），（2），（3）了.

参考文献

1　百度文库. 2008 年北京中考物理试题和答案[EB/OL]. http://wenku.baidu.com/view/7fd1fc92dd88d0d233d46a44.html，2012－06－04/2016－04－28

2　百度 作业帮. 欢欢土密度计[EB/OL]. http://www.zybang.com/question/2db78db73981299e849ec7b424a2883c.html. 2014－11－07/2016－04－28

3　百度. 作业帮. 欢欢土密度计[EB/OL]. http://www.zybang.com/question/5e60c39bbae68b405c5d80e96af523be.html. 2014－11－25/2016－04－28

质量为 m，重心 A 点坐标为 x_1；水的质量为 m'，重心 B 点坐标为 $-x_2$. 由公式

$$x_C = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}$$

可得

$$0 = \frac{mx_1 - m'x_2}{m + m'}$$

即

$$mx_1 = m'x_2 \tag{1}$$

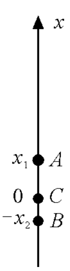

图 3

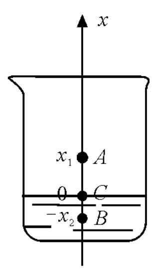

图 4

如图 4，在注水过程中，当重心 C 恰位于水面时，水面高度为 $2x_2$. 设水的密度为 ρ，则水的质量

$$m' = \rho S \cdot 2x_2 \tag{2}$$

代入式(1) 可得

$$mx_1 = \rho S \cdot 2x_2 \cdot x_2 \tag{3}$$

若液面上升 Δx，则液面高度变为 $2x_2 + \Delta x$，水的重心坐标变为 $-x_2 + \dfrac{\Delta x}{2}$. 假设系统重心 C 位置不变，由式(3) 可得

$$mx_1 = \rho S(2x_2 + \Delta x)\left(x_2 - \frac{\Delta x}{2}\right) = 2\rho S\left(x_2^2 - \frac{\Delta x^2}{4}\right) \tag{4}$$

将所得的结果与式(3) 比较，很显然若 x_1 不变，式(4) 是不成立的，所以假设不成立. 要使式(4) 成立，x_1 应减小，C 点应上升. 所以得到结论：当系统重心处在液面处时，继续注水，系统重心升高.

下面分析另一种情况：当系统重心位于液面处时，降低水位，判断重心如何变化.

设系统重心恰处于液面上的 C 点时，若液面下降 Δx，则液面高度变为 $2x_2 - \Delta x$，水的重心坐标变为 $-x_2 - \dfrac{\Delta x}{2}$. 假设系统重心 C 位置不变，由式(3) 可得

$$mx_1 = \rho S(2x_2 - \Delta x)\left(x_2 + \frac{\Delta x}{2}\right) = 2\rho S\left(x_2^2 - \frac{\Delta x^2}{4}\right) \tag{5}$$

所得结果与式(4) 相同. 所以得到相同的结论：当系统重心处在液面处时，降低水位，系统重心仍升高.

综上所述，可以得到结论：向空烧杯里注水时，系统重心降低，当系统重心降至液面处时，系统重心最低；继续注水，系统重心升高，当烧杯注满水时，系统重心升至原空烧杯重心处. 所以，对于本文前面给出的例题，正确答案为 C.

对上述结论的拓展应用：

【例题】(第七届全国奥赛决赛题) 一薄壁圆柱形烧杯，半径为 r，质量为 m，重心位于中心线上，离杯底的距离为 H，今将水慢慢注入杯中，问烧杯连同杯内的水共同重心最低时水面离杯底的距离等于多少？(设水密度为 ρ)

解析：如图 5，由题意知当重心下降到水面时，共同重心最低.

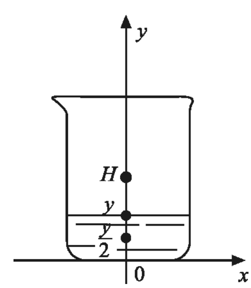

图 5

设注入水深度为 y，选烧杯底面直径为 x 轴，烧杯中心轴为 y 轴，底面圆心为坐标原点，建立直角坐标系，烧杯重心坐标为$(0, H)$，注入的水水面高度为 y，则水的重心坐标为$\left(0, \dfrac{y}{2}\right)$. 由坐标公式求得系统重心高度为

$$y_C = \frac{mH + \pi r^2 y\rho\,\dfrac{y}{2}}{m + \pi r^2 \rho y}$$

重心最低时 $y = y_C$，解方程求得

$$y = \frac{-m \pm \sqrt{m^2 + 2\pi r^2 \rho m H}}{\pi r^2 \rho}$$

根据题意舍去负值得

$$y = \frac{-m + \sqrt{m^2 + 2\pi r^2 \rho m H}}{\pi r^2 \rho}$$

要正确解决此题，必须应用之前推导的结论，即：系统重心处于水面高度时为其最低位置.