

# 动态等效模型构建的科学性论证

陈新华

(常州市第一中学 江苏 常州 213003)

(收稿日期:2016-04-05)

**摘要:**等效模型作为一种简化问题和迅速解决实际问题的有效手段,常常被用来解决复杂的物理问题.等效模型的建立过程就是假设性和科学性的辩证统一过程.本文对同一物理过程的两种不同等效模型进行比较,分析了动态等效模型的建立及论证.

**关键词:**等效模型 构建 科学性论证

## 1 问题的提出

**【题目】**(《新编高中物理奥赛实用题典》<sup>[1]</sup>第488页巩固练习第40题)如图1所示,质量为 $m$ ,带电荷量为 $q$ 的点电荷约束在一个很大的固定金属板左侧很近的位置,当他们之间的距离为 $d$ 时释放点电荷,试问这个带电质点到达金属板需要多长时间?

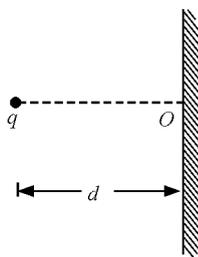


图1

**解法1:**(原书附解)

点电荷受到的力为

$$F = \frac{kq^2}{(2d)^2}$$

与引力场类比,释放后的电荷在与 $d$ 的平方成反比的力作用下,沿退化为直线的椭圆轨道运动,点电荷的初位置为“远地点”,像电荷的初位置为“近地点”,点电荷从初位置运动到金属板,相当于运动了 $\frac{1}{4}$ 个周期.根据

$$F = \frac{GM'm}{(2d)^2} = \frac{kq^2}{(2d)^2}$$

得等效质量

$$M' = \frac{kq^2}{Gm} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{GM'}}$$

式中 $a$ 为椭圆运动的半长轴, $a=d$ ,所以

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{md^3}{kq^2}}$$

时间

$$t = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{md^3}{kq^2}}$$

**解法2:**(笔者解法)

由镜像等效,金属板上的感应电荷对点电荷的作用力等效于像电荷对点电荷的库仑引力.像电荷与点电荷关于板对称,电荷量为 $-q$ ,如图2所示.

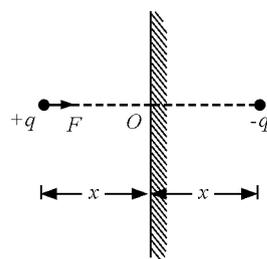


图2

初状态作用在点电荷上的静电力可由库仑定律得到

$$F = \frac{kq^2}{(2d)^2} = \frac{kq^2}{4d^2}$$

当点电荷向金属板靠近的时候,像电荷也会对称地向金属板靠近,当点电荷运动到金属板时,像电荷也运动到了金属板.故此过程可等效为点电荷受

在  $O$  点、质量为  $M'$  的质点的引力作用,且引力大小等于原电场力,即

$$F = \frac{GM'm}{d^2} = \frac{kq^2}{(2d)^2}$$

则等效质量

$$M' = \frac{kq^2}{4Gm}$$

与引力场类比,现在点电荷的运动可以看做是行星运动,遵循开普勒定律.点电荷运行轨迹可以看做很扁的椭圆,其半长轴  $a = \frac{d}{2}$ ,点电荷绕质量为  $M'$  的质点运行周期

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{GM'}} = 2\pi \sqrt{\frac{md^3}{2kq^2}}$$

点电荷从初始位置运动到金属板,经过

$$t = \frac{T}{2} = \pi \sqrt{\frac{md^3}{2kq^2}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{2md^3}{kq^2}}$$

## 2 两种解法的“碰撞”

解法 1 和解法 2 本意都是用等效物理模型避开复杂的数学运算,因而各采用了两个等效模型:镜像法和等效天体运动.

模型 1 是处理静电感应现象的常用方法——镜像等效.所谓镜像等效是把导体上的感应电荷用集中在施感电荷的镜像点上的一个或几个等效电荷来代替,并使等效电荷和施感电荷在导体表面上各点所产生的电位不变.由于加上等效电荷后并不改变施感电荷的电场分布,所以可以用场的叠加原理求空间电场分布(即电场强度),从而求出感应电荷的分布(即面电荷密度).这个等效模型的可靠性源于静电学的重要原理——唯一性原理,此处不再赘述.方法 1 和方法 2 运用这一模型求得的初态感应电荷对点电荷的作用力是一致的.

模型 2 是由于点电荷受到感应电荷的作用力满足平方反比定律,因而构造了天体运动的椭圆模型,并取了椭圆模型的特例——直线运动,来等效求时间.两种解法在模型 2 的构建上产生了“碰撞”.解法 1 构建的是一个静态模型:把点电荷的初始位置等效为“近地点”,把像电荷的初始位置等效为“远地点”,等效半长轴  $a = d$ ,点电荷从初始位置运动到金属板发生了  $d$  的位移,恰好是  $\frac{1}{4}$  周期.解法 2 构建了

一个动态模型:把粒子的初始位置等效为“近地点”,把  $O$  点等效为“远地点”,半长轴  $a = \frac{d}{2}$ ,粒子从初始位置运动到金属板发生了  $d$  的位移,因为是从“近地点”运动到“远地点”,时间是  $\frac{1}{4}$  周期.

这两种方法最大的区别就是:解法 1 把点电荷向金属板靠近的过程等效为静态模型,解法 2 把这一过程等效为动态模型.实际上,在这个过程中:当点电荷向金属板靠近的时候,金属板上的电荷出现了重新分布,相当于像电荷也对称地向金属板靠近,当点电荷运动到金属板时,像电荷也运动到了金属板.所以只能等效为点电荷受在  $O$  点,质量为  $M'$  的质点的引力作用,且引力大小等于原电场力.解法 1 的等效在初始位置是正确的,当电荷动起来的时候,像电荷也向板接近,这时候原电荷和像电荷间的距离就不再是  $2d$  了,把这个距离当做椭圆的长轴的话,长轴的长度是在减小,这是一个变化的椭圆,就不能直接套用不变的椭圆公式了.所以,动态的过程只能等效为动态的模型,解法 2 的等效在全过程、空间各点都能动态等效,更符合实际情况.

## 3 严格计算的科学性论证

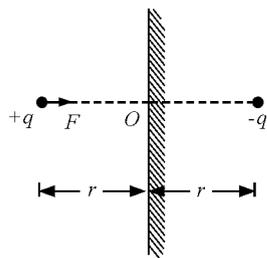


图 3

如图 3 所示,根据牛顿第二定律

$$\frac{kq^2}{(2r)^2} = m \frac{dv}{dt} = m \frac{dv}{dr} \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{kq^2}{(2r)^2} dr = -m v dv$$

$$\int_d^r \frac{kq^2}{4r^2} dr = - \int_0^v m v dv$$

$$\frac{kq^2}{4r} - \frac{kq^2}{4d} = \frac{1}{2} m v^2$$

$$v = \sqrt{\frac{kq^2}{2m} \frac{d-r}{rd}} = - \frac{dr}{dt}$$

$$\sqrt{\frac{kq^2}{2md}} dt = - \sqrt{\frac{r}{d-r}} dr$$

# 关于平行板电容器能量的讨论

吴红琴

(宜兴市第一中学 江苏 无锡 528414)

(收稿日期:2016-02-22)

**摘要:**讨论了平行板电容器储存的电场能和电势能,以及带电粒子飞入两板间电场及在电场中偏转过程中能量的转化情况,也讨论了电势能及其变化.

**关键词:**平行板电容器 能量 电场能 电势能 讨论

## 1 问题的起源

带电粒子在平行板电容器两极板之间的匀强电场中偏转是高中物理教学中的一个重点和难点.一次带电粒子在电场中偏转问题(如图1所示)的教学中,有学生提出疑问:“带电粒子飞出电场动能增加

了,增加的动能从何而来?”引导学生从电场力做功与电势能变化的关系,以及动能定理分析得出:在这一过程中通过电场力做功把电势能转化为粒子的动能.学生又产生了新的疑问:原来在电场之外的电荷飞入电场立刻就具有电势能  $E_p = \varphi q$ ,电势能从哪里来?电势能与哪些因素有关?在学生的启发下,

令  $r = d \sin^2 \theta$ , 则  $dr = 2d \sin \theta \cos \theta d\theta$ , 则

$$\sqrt{\frac{kq^2}{2md}} dt = -\frac{\sin \theta}{\cos \theta} dr =$$

$$-2d \sin^2 \theta d\theta = d(\cos 2\theta - 1)d\theta$$

当  $t=0$  时,  $r=d, \theta = \frac{\pi}{2}$ ; 当  $t=t$  时,  $r=0, \theta=0$ , 得

$$\int_0^t \sqrt{\frac{kq^2}{2md}} dt = d \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (\cos 2\theta - 1) d\theta$$

$$\sqrt{\frac{kq^2}{2md}} t = d \left( \frac{1}{2} \sin 2\theta - \theta \right) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^0 = \frac{\pi}{2} d$$

$$t = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{2md^3}{kq^2}}$$

严格的计算证实了我们的分析:点电荷向金属板运动是一个动态的过程,只能等效为动态模型.

## 4 动态等效模型的构建要点

等效模型是指在保证某种效果(特性和关系)相同的前提下,将实际的、复杂的物理问题和物理过程转化为等效的、简单的、易于研究的物理问题和物理过程来研究和处理.

动态等效模型的建立是一个将具体问题进行抽象和构造的过程,一般过程如下:

(1) 对问题中研究对象的条件及物理过程的特征进行分析;

(2) 回顾已有的科学知识和方法,寻找与研究问题相类似的模型,可能是条件上的类似,也可能是方法上的类似,还可能是结果上的类似;

(3) 结合以上两点,经过判断、推理等一系列逻辑思维过程,提炼构造出与研究问题相适应的等效模型;

(4) 对等效模型进行科学性验证,可以是物理方法上的判断,也可以用严格的数学运算来验证;

(5) 确立模型.

等效模型源于现实,又高于现实,是在已有经验基础上的假设性和科学性的辩证统一,假设性能否转化为科学性的关键就在严格的科学论证.从物理的角度,科学性论证常常从空间和时间两个维度进行:在空间上,应该是全方位的等效;在时间上,应该是全过程的等效.本文方法2在处理题设问题时更科学,主要就是在空间和时间两个维度上都能严格等效,而这,也是我们判断等效过程能否实现的重要依据.

## 参考文献

- 1 范小辉.新编高中物理奥赛实用题典.南京:南京师范大学出版社,2008.488