



斜面上下滑滑块机械能守恒问题新解

张 翠

(济南市长清第一中学 山东 济南 250300)

(收稿日期:2016-04-11)

摘 要:通过数学运算和理论分析,重新解答了斜面上向下滑动的滑块机械能守恒问题,得出了在地面上和相对于地面做匀速运动的小车上,下滑滑块机械能都守恒的新结论,拓展了对机械能守恒的适用领域。

关键词:斜面上下滑滑块 动能 势能 机械能守恒

【题目】在水平地面上筑一表面光滑的斜坡,坡高为 h ,坡面与水平地面的夹角为 θ . 最初,有一质量为 m 的滑块(视为质点)静止在斜坡的最高处. 时间 t 等于零时,滑块从斜坡的最高处沿斜坡自由滑下,同时有一小车相对于地面以恒速量值 u 向右运动. 试问在地面(地球质量视为充分大,故稳定地保持为惯性系)和小车上观察,滑块的机械能是否都守恒,并说明理由.

解法 1:在地面参考系看来,斜面的支持力始终不做功,小滑块在斜面上运动回到出发点时支持力做功始终等于零,在地面系看来支持力是一个保守力,又因为重力也是一个保守力,因此它们的合力也是一个保守力. 物体与斜面组成保守系统. 由于力是一个伽利略变换的不变量,因此在小车参考系看来滑块受到的合力也是一个保守力,本文从合力的角度研究这个问题.

在地面上观察时,以坡面顶点 O 为坐标原点,以过 O 且垂直于水平地面的向上的直线为 y 轴,以过 O 且垂直于 y 轴的向右的直线为 x 轴,建立平面直角坐标系如图 1 所示. 设最高点的势能为零.

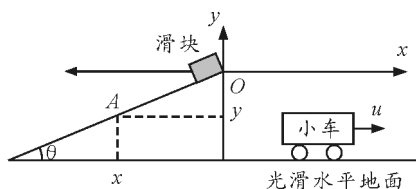


图 1 斜面上下滑滑块机械能守恒问题新解

设滑块 t 时刻的高度、速度、加速度、动能、势能、机械能分别为: $y, v, a, E_k(t), E_p(t), E(t)$; 在小

车上观察时,滑块 t 时刻的高度、速度、加速度、动能、势能、机械能分别为 $y_1, v_1, a_1, E_{1k}(t), E_{1p}(t), E_1(t)$, 则在地面上观察时有

$$\left. \begin{aligned} mg \sin \theta &= ma \\ \frac{dv}{dt} &= a = g \sin \theta \\ dv &= g \sin \theta dt \end{aligned} \right\}$$

$$\int_0^v dv = g \sin \theta \int_0^t dt$$

$$v - 0 = (t - 0) g \sin \theta$$

$$v = tg \sin \theta$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= v = tg \sin \theta \\ ds &= tg \sin \theta dt \end{aligned} \right\}$$

$$\int_0^s ds = g \sin \theta \int_0^t t dt$$

$$s - 0 = \frac{1}{2} (t^2 - 0^2) g \sin \theta$$

$$s = \frac{1}{2} t^2 g \sin \theta$$

$$0 - y = s \sin \theta = \frac{1}{2} t^2 g \sin \theta \sin \theta =$$

$$\frac{1}{2} t^2 g \sin^2 \theta (-h \leq y \leq 0)$$

$$\left. \begin{aligned} t^2 &= \frac{-2y}{g \sin^2 \theta} \\ t &= \frac{\sqrt{-2y}}{\sqrt{g} \sin \theta} \\ s &= \frac{-y}{\sin \theta} \end{aligned} \right\}$$

$$v = \frac{\sqrt{-2y}}{\sqrt{g} \sin \theta} g \sin \theta = \sqrt{-2gy}$$

$$v^2 = -2gy$$

$$v_x = -\sqrt{-2gy} \cos \theta$$

$$E_k(t) = E_k'(y) = \frac{1}{2}mv^2 =$$

$$\frac{1}{2}m(-2gy) = -mgy$$

$$E_p(t) = E_p'(y) = mgy$$

或

$$E_p(t) = E_p'(y) = 0 - mas =$$

$$-(mg \sin \theta) \frac{-y}{\sin \theta} = mgy$$

$$E(t) = E_k(t) + E_p(t) = E_k'(y) + E_p'(y) =$$

$$-mgy + mgy = 0 = \text{常数}$$

所以,在地面上观察时,滑块的机械能守恒,守恒值为零.

在小车参照系上观察时,直觉判断:

因为滑块在最高点以匀速度 u 相对于小车沿 x 轴负向运动,我们规定此时的势能为零,所以在小车参照系上观察(即以小车参照系为静止系)时,滑块的机械能比在地面参照系上观察时增加

$$\frac{1}{2}m(-u)^2 = \frac{1}{2}mu^2$$

所以在小车参照系上观察时,滑块的机械能为

$$E_1(t) = E(t) + \frac{1}{2}mu^2 =$$

$$E'(y) + \frac{1}{2}mu^2 (\text{常数})$$

所以,在小车参照系上观察时,滑块的机械能守恒,守恒值为 $\frac{1}{2}mu^2$.

数学推导:

$$v_{1x} = v_x - u$$

$$v_{1x}^2 = (v_x - u)^2 = v_x^2 + u^2 - 2uv_x$$

$$v_{1y} = v_y$$

$$v_{1y}^2 = v_y^2$$

$$v_1^2 = v_{1x}^2 + v_{1y}^2 = v_x^2 + u^2 - 2u \times v_x + v_y^2 =$$

$$v^2 + u^2 - 2u \times v_x =$$

$$-2gy + u^2 + 2u \times \sqrt{-2gy} \cos \theta$$

$$E_{1k}(t) = E_{1k}'(y) = \frac{1}{2}mv_1^2 =$$

$$-mgy + \frac{1}{2}mu^2 + mu \cdot \sqrt{-2gy} \cos \theta$$

$$a_{1x} = \frac{dv_{1x}}{dt} = \frac{dv_x}{dt} - 0 = a_x \left. \vphantom{\frac{dv_{1x}}{dt}} \right\}$$

$$a_{1y} = \frac{dv_{1y}}{dt} = \frac{dv_y}{dt} = a_y$$

$$a_1 = a = g \sin \theta$$

$$ma_{1x} = ma_x \left. \vphantom{ma_{1x}} \right\}$$

$$ma_{1y} = ma_y$$

$$ma_1 = ma = mg \sin \theta$$

$$0 - E_{1p}(t) = -E_{1p}'(y) =$$

$$(ma_1 \sin \theta)s + (-ma_1 \sin \theta \cos \theta)(-u)(t-0) =$$

$$(mg \sin \theta) \cdot \frac{-y}{\sin \theta} + (mg \sin \theta \cos \theta) \cdot u \cdot \frac{\sqrt{-2y}}{\sqrt{g} \sin \theta} =$$

$$-mgy + mu \cdot \sqrt{-2gy} \cos \theta$$

$$E_{1p}(t) = E_{1p}'(y) = E_{1p}'(y) =$$

$$mgy - mu \times \sqrt{-2gy} \cos \theta$$

$$E_1(t) = E_{1k}(t) + E_{1p}(t) = E_{1k}'(y) + E_{1p}'(y) =$$

$$-mgy + \frac{1}{2}mu^2 + mu \cdot \sqrt{-2gy} \cos \theta + mgy -$$

$$mu \cdot \sqrt{-2gy} \cos \theta = \frac{1}{2}mu^2 = \text{常数}$$

所以,在小车参照系上观察时,滑块的机械能守恒,守恒值为 $\frac{1}{2}mu^2$. 当 $u=0$ 时两个坐标系重合,守恒值相等,符合玻尔的对对应原理.

说明:

$E_{1p}(t) = E_{1p}'(y) = mgy - mu \times \sqrt{-2gy} \cos \theta$
和

$$E_p(t) = E_p'(y) = mgy$$

并不始终相等,当 $u \neq 0$ 时,当且仅当 $y=0$ 时相等,也就是说只有初始状态时相等,主要是由于小车系在合力的分力方向上位移不是始终等于零;当 $u=0$ 时二者始终相等,这也符合玻尔的对对应原理. 在滑块滑到底端时,小车系测量的势能为 $-mgh - mu \cdot \sqrt{2gh} \cos \theta$,地面系测量的势能为 $-mgh$. 在斜面问题中斜面的支持力和重力垂直于斜面方向的分力的合力是约束力,这样在地面系和小车系测量约束力做功之和为零,约束力不改变滑块的机械能,只需考察重力沿平行于斜面方向的分力即可. 如果观察者沿着合力的垂直方向匀速运动,则它们始终相等,等于 mgh ,请读者自己证明.

解法2:据伽利略变换或图2知

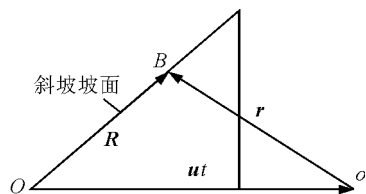


图2 斜面下滑滑块机械能守恒问题新解

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + \mathbf{ut} \quad \mathbf{V} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{a} + 0 = \mathbf{a} \quad \mathbf{F} = m\mathbf{A} = m\mathbf{a} = \mathbf{f}$$

$$V^2 = \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} = (\mathbf{v} + \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{u}) =$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = v^2 + 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + u^2$$

$$\frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{2}mv^2 + m\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{2}mu^2$$

$$E_k = e_k + m\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + C$$

$$dE_k = de_k + m\mathbf{u} \cdot d\mathbf{v} + dC =$$

$$de_k + \mathbf{u} \cdot m \frac{d\mathbf{v}}{dt} dt + 0 = de_k + \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} dt$$

$$dE_p = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = -\mathbf{f} \cdot d(\mathbf{r} + \mathbf{ut}) =$$

$$-\mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} - \mathbf{f} \cdot d(\mathbf{ut}) = de_p - \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} dt$$

$$dE_k + dE_p = de_k + \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} dt + de_p - \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} dt =$$

$$de_k + de_p$$

$$d(e_k + e_p) = d(E_k + E_p)$$

$$de = dE = 0$$

所以,在小车参考系观察时,滑块的机械能守恒.由于在小车参考系看来滑块在最高点的机械能为 $\frac{1}{2}mu^2$,因此守恒量为 $\frac{1}{2}mu^2$.

在上面的斜面问题中势能只能说是类重力势能(相当于把重力缩小然后旋转一个角度),不是重力势能,因为质点受到的合力不等于重力.当观察者相对于斜面静止时,利用机械能守恒定律得出的结果等效,以至于人们发生误解——斜面问题中的机械能守恒问题就是重力机械能问题;当观察者相对于斜面匀速运动时,直接利用重力机械能守恒定律是错误的,应当利用势能定义(保守力所做的功等于势能的减少)来计算.在地面系和小车系计算的机械能都守恒,进一步验证了斜面的支持力是一个保守力.本题也可以按照两个保守力分别分析.机械能守恒定律中的保守力应该是保守力的合力,不存在内力和外力之分,对于质点而言都是外力,可以分为保守力和非保守力,本题中如果按照重力机械能计算显然不满足力学相对性原理.

参考文献[1~7]一直认为斜面问题是重力机械能守恒问题,因此得出了小车系机械能不守恒的错误.参考文献[8~9]认为机械能守恒定律满足力学相对性原理但是不具有单独的协变性,因为系统的外力在一个惯性系可能不做功,在另一个惯性系可能做功,功具有相对性.在这里作者忽略了一个问题,如果系统的外力在一个惯性系不做功,那么系统的内力一定存在一个分力与之是平衡力,该力在这个惯性系中也不做功;在另一个惯性系中系统的外力尽管做功,但是它的平衡力也在做功,而且它们做的功互为相反数,代数和为零,不改变系统的机械能.换句话说,质点所受到的合外力在两个惯性系中相同,在一个惯性系中机械能守恒,在另一个惯性系中机械能也守恒,研究机械能守恒问题应该研究保守力的合力,因此本文就研究滑块受到的合力(保守力),参考文献[8~9]的观点是完全错误的.

参考文献

- 高炳坤. 力学中一个诡秘的错误. 物理与工程, 2002, (12)2:14~15, 30
- 赵坚. 机械能守恒定律理解中一个值得重视的问题. 物理通报, 2006, (25)6:19~21
- 钱广东. 不同惯性系中机械能不一定都守恒——兼谈机械能守恒定律是否服从力学相对性原理. 物理教学, 2006, (28)2:42~43
- 白静江. 两体问题中的功能原理及机械能守恒定律. 大学物理, 1997, (16)3:11~14
- 冯健. 滑块的机械能还守恒吗. 物理教学探讨, 2006, (24)1:43
- 徐祥宝. 以地面为参照系机械能不守恒. 物理教学探讨, 2006, (24)9:36~37
- 孙国标, 杨丽芬. 也谈机械能守恒的相对性. 物理教师, 2006, (27)12:32~33
- 朱如曾. 相对性原理及其对自然界定律的协变性要求. 大学物理, 2000, 19(2):15~19
- 朱如曾. 相对性原理对普遍定律和非普遍定律参考系变换性质的不同要求——关于协变性疑难的进一步讨论. 大学物理, 2002, 21(3):19~23
- 张申如, 孙松庚. 作用力与反作用力作功之和与参照系无关的一种证明. 大学物理, 1986(01)
- 赵文桐, 刘文芳, 刘明成. 重力机械能在各惯性系都成立. 物理通报, 2015(3)