

平行板电容器内电介质受力问题剖析

李帅龙 李智华

(华中科技大学物理学院 湖北 武汉 430074)

(收稿日期:2016-04-12)

摘要:关于平行板电容器内电介质受力问题,普通大学电磁学教材大都利用虚功原理求解^[1],但没有说明该力产生的根源.笔者基于液体表面张力的模型,对该力的产生做了深入剖析.特别地,本文将虚功原理的结果、边缘效应(即电容器边缘处电介质的极化不同于中心处电介质的极化而产生的效应)的结论以及束缚电荷模型进行对比和分析,揭示它们的统一性.

关键词:平行板电容器 电介质 边缘效应 虚功原理 束缚电荷

1 前言

平行板电容器内电介质受电场的作用产生极化,极化后的电介质会形成极化束缚电荷,与电容器极板上的自由电荷通过库仑力相互作用,使得电介质有被拉进电容器的趋势.普通电磁学教材都采用虚功原理,简洁地给出了该力的表达式.它没有对这种力的根本来源做出解释,同时留下了一系列引人思考的问题:它到底是只与极板内侧电介质表面束缚电荷有关呢,还是与边缘效应有关?或者其实与这些因素均有关系,只是哪个因素占主导地位?本文受液体表面张力的模型的启发,成功地解释了电介质受力的来源;特别地,本文将虚功原理的结果、边缘效应结论以及束缚电荷模型进行对比和深入剖析,揭示它们的统一性.

2 液体表面张力模型

作用于液体表面使液体表面积缩小的力,称为液体表面张力.它产生的原因是,液体跟空气接触的表面存在一个薄层,即表面层,表面层里的分子比液体内部稀疏,分子间的距离比液体内部大一些,分子间的作用力表现为相互作用引力.

可以看出,表面层内分子之间的引力导致了液体表面张力的产生.联系到自由电荷在金属极板上的分布,电荷分布在极板的表面,相互之间会有库仑

斥力的作用,而且良导体表面的自由电荷也具有跟流体一样的性质,且自由电荷面密度越大,这种“库仑张力”也就越大,只是这时的力使电荷的分布范围有向外延展的趋势.因此我们推测自由电荷分布的表面层也存在与液体表面类似的“表面张力”.若进一步将这一模型应用到有电介质存在的极板表面,自由电荷面密度在有电介质区域比没有电介质区域大,前者的“库仑张力”也就比后者大,我们认为这时极板向电容器内部运动的趋势正是自由电荷“表面张力”的表现,并做了进一步的定量分析.

为了量化表面自由电荷间的张力,和分析液体表面张力的方法一样,在局部自由电荷均匀分布的极板表面划出一条直线,考察直线两边电荷相互作用的总斥力.若选取无限大均布电荷平板的模型计算,会发现,在任意所作的有限长的直线两边,当直线两边的电荷分开一个确定的小距离时,由于电场散布无穷大空间,静电能将增加无限大.利用虚功原理可以得出单位长度直线两侧电荷相互斥力无限大的结论,这不便于做定量分析.为此,可以选择电场分布在有限区域的平行板电容器模型.

如图1所示,设平行板电容器两极板长度为 b ,宽度为 a ,极板间距离为 d ,且有 $a \gg d, b \gg d$,这样,考虑极板中间电场时可以将极板做无穷大平板处理.在上极板上取平行于极板边缘的直线 AB ,并选取直线上一点 P .为了计算 P 点左侧电荷受到的来

作者简介:李帅龙(1993-),男,在读本科生.

通讯作者:李智华(1976-),女,教授,博士生导师,从事激光与物质相互作用方面的研究.

自电容器右侧电荷的斥力,如图1所示建立坐标系,其中直线AB位于 $x=0$ 处,且和 y 轴平行, P 点为 z 轴和直线AB的交点.为了计算 $x>0$ 区域中所有电荷对 P 点电场的贡献,这里先计算下极板 $x>0$ 部分电荷在 P 处产生的电场强度 E_1 .

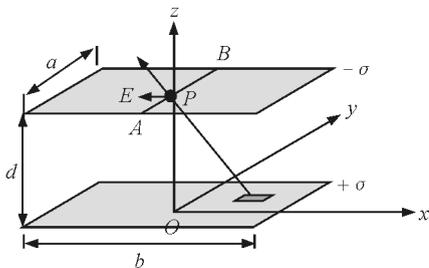


图1 平行极板上自由电荷相互作用

首先,根据对称性, P 处的电场强度沿 x 方向,因此在计算电场时我们只需计入 x 方向的即可.进一步计算时可以发现,位于下极板上 $x=0$ 邻近处电荷对 P 点电场的贡献会引起积分发散,为了避免这一困难,将电场的积分下限改为 $x=r$,这里 r 为大于零的任意常量.所以下极板上 $x>r$ 区域内通过对任意 $(x,y,0)$ 处的电荷元对 P 点的电场的贡献积分,可以得到 P 点电场为

$$E_1 = - \int_r^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+d^2}} \cdot \frac{\sigma_0 dy}{x^2+y^2+d^2} \quad (1)$$

σ_0 为极板表面电荷面密度.

再考虑上极板 $x>0$ 部分电荷在 P 处产生的电场强度 E_2 ,这时只需在上式中令 $d=0$,因此上极板上 $x>0$ 区域内电荷对 P 点电场的贡献为

$$E_2 = \int_r^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{\sigma_0 dy}{x^2+y^2} \quad (2)$$

将 E_1, E_2 相加,即得 $x>0$ 区域内总电荷对 P 点电场的总贡献为

$$E = \frac{\sigma_0}{4\pi\epsilon_0} \ln\left(1 + \frac{d^2}{r^2}\right) \quad (3)$$

这里还不能马上算出总电场强度 E 的大小,因为当 $r \rightarrow 0$ 时该积分依旧发散.但幸运的是,我们可以计算出上极板 $x<0$ 部分的电荷受到的来自 $x>0$ 区域电荷的总的库仑斥力 F_1 ,即

$$F_1 = - \int_{-\infty}^0 \frac{\sigma_0^2 a}{4\pi\epsilon_0} \ln\left[1 + \frac{d^2}{(r-x)^2}\right] dx \quad (4)$$

而且当 $r \rightarrow 0$ 时,该积分收敛,可得到

$$F_1 = - \int_{-\infty}^0 \frac{\sigma_0^2 a}{4\pi\epsilon_0} \ln\left(1 + \frac{d^2}{x^2}\right) dx = \frac{\sigma_0^2 ad}{4\epsilon_0} \quad (5)$$

这样,我们定量地表示了自由电荷薄层上一定长度直线一侧的电荷受到的来自直线另外一侧的电荷的总斥力.根据对称性,上下两极板上电荷受合力等大同向,故可计算出直线 $x>0$ 和 $x<0$ 两区域间总的相互作用的斥力大小为

$$F = \frac{ad}{2\epsilon_0} \sigma_0^2 \quad (6)$$

由此推算出的力的大小与直线的长度 a 成正比,与电荷密度的平方成正比,这与液体表面张力模型一致.

当直线AB所在的区域有电介质存在时,这时直线AB两侧相互作用的对象不仅只有自由电荷,电介质表面的极化电荷也要计入.但是这里应该注意的是,在我们的模型中,极板上自由电荷才是可以自由“流动”的,最终极板的运动是自由电荷这种“流体”的张力的表现,所以此时的张力应该是直线另一侧自由电荷和极化电荷对本侧自由电荷的斥力.

设极板上自由电荷的面密度为 σ ,则净电荷密度为

$$\sigma_{\text{net}} = \left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right)\sigma$$

电介质上极化电荷面密度为

$$\sigma_p = -\left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right)\sigma$$

所以在有电介质的情况下,直线AB左侧极板上自由电荷受右侧总电荷的库仑作用力为

$$F = F_{\text{net-net}} - F_{\text{p-net}} = \frac{ad}{2\epsilon_0} \left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon}\sigma\right)^2 - \frac{ad}{2\epsilon_0} \left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon}\sigma\right) \left(-\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon}\sigma\right) = \frac{ad}{2\epsilon} \sigma^2 \quad (7)$$

这里 $F_{\text{net-net}}$ 表示直线两侧极板上净电荷产生的库仑张力, $F_{\text{p-net}}$ 表示直线一侧电介质上极化电荷与另一侧总电荷(即净电荷)的库仑作用力,两者相减则得到直线一侧的自由电荷受到另外一侧总电荷的作用力,即我们需要的“流体张力”,这与式(6)的形式相同.

经过上面的推导可知,有电介质的部分和没有电介质的部分极板上表层电子的库仑张力是不一样

的,那么当这两种表面层接触时,斥力大的表面层将扩张,斥力小的表面层将缩小.这正是极板间的电介质向极板内部运动的原因.

在部分插入电介质的极板电容器中,有电介质和没有电介质的部分相当于两种自由电荷薄层,它们有不同的“张力系数”,分别由式(6)和式(7)表示.在极板间的电势差一定时

$$\frac{ad}{2\epsilon}\sigma^2 > \frac{ad}{2\epsilon_0}\sigma_0^2$$

所以有电介质存在的部分面积将扩张,没有电介质存在的地方面积将收缩,这种趋势导致电介质受到的合力为

$$F = \frac{ad}{2} \frac{\sigma^2}{\epsilon} - \frac{ad}{2} \frac{\sigma_0^2}{\epsilon_0} \quad (8)$$

这正是平行板电容器内电介质受到的指向电容器内部的力公式.这种方法将电介质受到的力归结为电容器极板上自由电荷所受的力,该力只与自由电荷面密度和电解质的介电常数相关,而与电介质边缘怎样无关.

3 平行板电容器内电介质受力问题其他分析方法

方法 1: 用虚功原理求解

如图 2 所示,教材中根据虚功原理^[1],假定平行极板间电压不变时

$$F = \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)_U = \frac{1}{2} U^2 \frac{\partial C}{\partial x} \quad (9)$$

又

$$W = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{\epsilon a x}{d} + \frac{\epsilon_0 (b-x)a}{d} \right] U^2 \quad (10)$$

其中 σ_0 为电容器极板上没有电介质区域的自由电荷面密度, σ 为电容器极板上有电介质区域自由电荷面密度,代入即可得到式(8).

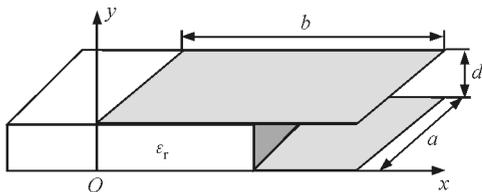


图 2 虚功原理求极板内电介质受力

方法 2: 从边缘效应的角度求解^[2]

该方法将电介质受到的合力归结为电场对极化后电介质内电偶极子的作用力,如图 2 所示,电介质上单位体积内受到的作用力可以表示为

$$f = (\mathbf{P} \cdot \nabla) \mathbf{E} \quad (11)$$

则体积为 V 的电介质受的总力是

$$\mathbf{F} = \int_V (d\mathbf{P} \cdot \nabla) \mathbf{E} = \int_V (\mathbf{P} \cdot \nabla) \mathbf{E} dV = (\epsilon - \epsilon_0) \int_V (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{E} dV \quad (12)$$

其中 \mathbf{P} 为介质极化强度矢量, $\mathbf{P} = (\epsilon - \epsilon_0) \mathbf{E}$. 利用恒等式 $\nabla E^2 = 2(\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{E}$, 得

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2} (\epsilon - \epsilon_0) \int_V \nabla E^2 dV \quad (13)$$

在电容器外部 $E = 0$, 内部为

$$E^2 = \left(\frac{\sigma}{\epsilon} \right)^2$$

这里 σ 为有电介质存在部分自由电荷面密度. 积分得

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2} (\epsilon - \epsilon_0) \int_V \frac{\partial E^2}{\partial x} dx dS = \frac{ad}{2} (\epsilon - \epsilon_0) \left(\frac{\sigma}{\epsilon} \right)^2 = \frac{ad\sigma^2}{2\epsilon} - \frac{ad\epsilon_0\sigma^2}{2\epsilon^2} \quad (14)$$

与式(8)结果相同.

方法 3: 通过研究束缚电荷受力求解^[3]

该方法认为电介质受到的作用力来源于电介质表面束缚电荷受到的横向电场力作用(垂直于极板方向的力相互抵消)而不需要考虑边缘效应. 在不考虑边缘效应计算电介质受力时,只需考虑电介质上极化电荷受极板上总自由电荷的作用力. 考虑到有极板存在处的自由电荷对极化电荷的作用力为零,因此只需考虑图 2 中没有电介质区域自由电荷对电介质上极化电荷的作用力.

设图 2 中电介质在 x 轴上的边界为 $x = x_0$, 那么根据式(3), 在 $x < x_0$ 处上下极板上的电场强度为

$$E = \frac{\sigma_0}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[1 + \frac{d^2}{(x - x_0)^2} \right]$$

其中 σ_0 为电容器中没有电介质区域的自由电荷密度. 由于电介质上极化电荷的密度为

$$\sigma_p = \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0} - 1 \right) \sigma_0$$

所以电介质受到的总的作用力为

$$F = 2 \cdot \frac{\left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0} - 1 \right) a \sigma_0^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot$$

$$\int_0^{x_0} \ln \left[1 + \frac{d^2}{(x - x_0)^2} \right] dx = \frac{ad\sigma_0^2}{2} \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0^2} - \frac{1}{\epsilon_0} \right) \quad (15)$$

上式积分时利用了 $x_0 \gg d$ 的关系. 这里得到的结果与式(8)相同.

4 不同模型对比和统一性剖析

本文提出的表面张力模型赋予电介质受力完全不同的物理图像, 给出了力的最直观解释. 它是说自由电荷的“流动性”会带动电介质运动, 与极板上均匀电荷、极板间匀强电场直接相关, 而与边缘效应毫无关联. 或者说, 本文提出的模型认为, 极板的受力完全是电容器内均匀分布的电荷的影响, 与边缘效应无关, 或者其影响完全可以忽略, 这与方法3的观点一致. 与之相反, 方法2则是说电介质的运动是电介质极化的不均匀引起的, 或者说就是电容器内部和边缘电介质被极化的差异引起的, 就是所谓的边缘效应.

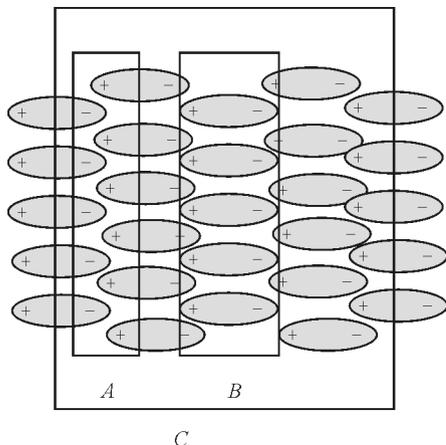


图3 束缚电荷在电场中受力的微观机制

其实深入分析会发现方法2和方法3是等价的, 图3展示了它们的统一性. 这是一块电介质在电场中极化后的情形, C 为电介质的边界. 方法2把电偶极子作为研究对象, 即把矩形 B 内的电偶极子作为研究单元, 因此单位体积电介质受力可以用式(11)来表示, 电介质所受总电场力为所有电偶极子受力的矢量和. 而在均匀电介质内部, 极化强度矢量 \mathbf{P} 满足 $\mathbf{P} = \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E}$, 介质内无自由电荷时, $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, 因此

$$-\rho_p = \nabla \cdot \mathbf{P} = 0 \quad (16)$$

即介质内部净极化电荷为零, 如图3中矩形 A 区域所示. 所以介质内部受外场的作用力为零. 只有在介质的非均匀处, 如介质表面, 才有净束缚电荷, 电介质所受电场力作用等效于介质表面的束缚电荷受电

场力作用, 如图3中矩形 C 区域所示. 矩形 C 区域内净束缚电荷为零, 矩形外表面才有束缚电荷分布. 因此, 方法2和方法3都将电介质所受的力归结为电介质在电容器中极化后与电容器极板上自由电荷的相互作用, 只是考察的方式不同.

虽然它们的考察方式不同, 但是它们对电介质在电容器中所做的近似却是相同的. 方法2也只用了电容器内部的电介质被均匀极化, 外面的无极化这一性质; 方法3只需假定电容器内部的电介质被均匀极化.

电容器内部的电介质表面极化出均匀的束缚电荷是这些模型的必然要求, 这使得我们在研究这个问题时很容易跨过边缘效应而注意到电容器内部物理量的变化, 如方法1和方法2. 不过虚功原理并没有否定该力是由边缘效应引起的, 因为在这个虚过程中系统能量变化并没有引起边缘部分能量的变化, 只是中间理想部分的区域发生了能量变化, 那么直接采用理想电容器模型的虚功原理必然是正确的^[4].

5 总结

本文首先采用表面张力模型解释了平行板电容器内电介质受力的来源, 再给出了针对该问题从不同角度出发的3种不同的方法, 其中虚功原理最具实用性和有效性, 很简单地给出力的表达式, 其余3种方法则是从力的角度对力的来源做了探索. 表面张力模型和方法在观点上是一致的, 但区别在于表面张力模型完全不考虑边缘效应, 直接与电容器内均匀面电荷和匀强电场相关联, 给出了该力在形式上最直观的解释. 方法2和3虽然看似毫不相关, 本文证明了它们的等效性, 发现它们对电介质在电容器中所做的近似是相同的.

参考文献

- 1 胡友秋, 程福臻, 叶邦角. 电磁学与电动力学. 北京: 科学出版社, 2010. 84
- 2 江滨浩. 作用于平行板电容器中电介质的力. 电工教学, 1996, 16(2): 34
- 3 余耀令. 对平行板电容器内介质受力计算的异议. 大学物理, 1998(11): 25
- 4 荆亚玲. 关于平行板电容器内介质受力的进一步讨论. 大学物理, 1991(5): 17