刚体与质点动力学关系的内在统一性*

张明铎 郝长春 莫润阳 沈壮志
(陕西师范大学物理学与信息技术学院 陕西 西安 710119)

(收稿日期:2016-04-26)

摘 要:质点动力学和刚体定轴转动动力学分别遵循牛顿第二定律和转动定理,好像互不相关,但这两个规律本质上都是描述适用对象在外因作用下运动状态的变化与外因量之间的关系,反映相关物理量之间关系的数学方程形式上完全一样.通过对比分析这些内在联系,给出了这两个力学模型动力学方程的统一表述.

关键词:质点 刚体 动力学规律 动量定理 牛顿第二定律 角动量定理 转动定理

1 引言

质点和刚体是分析和研究力学现象的两个非常重要的基本模型,质点动力学和刚体定轴转动动力学是大学物理教学的主要内容[1~4].中学物理涉及的动力学问题绝大多数是质点动力学.与中学物理相比,大学物理有关质点动力学内容的主要差异在于更多的强调矢量的概念、运动的多维性和瞬态性以及微积分的应用等.所以,学生对于这一部分的学习理解相对容易些.但刚体动力学涉及的概念、定义、定律等,对学生来说几乎是“全新”的问题,大家往往感觉理解困难.本文从动力学的因果关系入手,结合刚体定轴转动的动力学问题,运用比较的方法,揭示这两个力学模型实质上的“统一性”.

2 两个力学模型的概念与主要研究内容

2.1 质点的概念与主要内容

就所研究的问题而言,当物体的大小和形状可忽略不计时,可把物体简化为理想化的模型 —— 只有质量而没有形状和大小的几何点,称之为质点.一个物体能否看作质点,并不取决于其实际大小,而是由研究问题的性质确定.

描述质点动力学关系的物理量主要有:位置矢量、位移、速度、加速度、动量、动能及势能等.相关的主要定律、定理有:牛顿定律、动量定理、动量守恒定律、动能定理、功能原理、机械能转化与守恒定律等.

质点模型主要用于研究物体平动过程的动力学现象.

2.2 刚体的概念与主要内容

对所研究的问题来说,当物体在受力时发生的形变很小且可忽略不计时,可把物体简化为理想化的模型 —— 在任何情况下其形状和大小都保持不变的物体,称之为刚体.一个物体能否看作刚体,并不取决于其形变的实际大小,而是由研究问题的性质确定.

描述刚体动力学关系的物理量主要有:角坐标、角位移、角速度、角加速度、角动量、转动动能等.相关的主要定律、定理有:角动量定理、角动量守恒定律、转动定理、转动动能定理、功能原理、机械能转化与守恒定律等.

刚体模型主要用于研究物体较复杂运动过程的动力学现象.许多情况下,物体的复杂运动可看作由两种基本运动(物体的质心运动和物体绕质心轴的定轴转动)叠加而成.质心运动可用质点动力学描述,所以,本文重点探讨刚体定轴转动的动力学问题.

* 陕西师范大学2016年度校级综合教学改革项目,项目编号:16JG23
作者简介:张明铎(1963-),男,副研究员,主要从事声学及大学物理的教学和科研工作.

3　两个力学模型的比较

质点动力学和刚体定轴转动动力学是大学物理力学部分的主要内容，相关物理量的定义以及它们各自所遵循的规律，在相关教材[1~4] 中都有详尽的描述．为便于比较和分析，本文作了简要总结，如表 1 和表 2 所示．

表 1　质点与刚体定轴转动的比较之一

质点一维直线运动		质点三维运动		刚体绕定轴转动	
运动方程	$x = x(t)$	运动方程	$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$	运动方程	$\theta = \theta(t)$
位移	$\Delta x = x(t+\Delta t) - x(t)$	位移	$\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t)$	角位移	$\Delta\theta = \theta(t+\Delta t) - \theta(t)$
速度	$v = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$	速度	$\boldsymbol{v} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$	角速度	$\omega = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$
加速度	$a = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}$	加速度	$\boldsymbol{a} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$	角加速度	$\beta = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$
a 为常量	$v = v_0 + at$	$\boldsymbol{a}$ 为恒矢量	$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{a}t$	β 为常量	$\omega = \omega_0 + \beta t$
	$x = x_0 + v_0 t + \dfrac{1}{2}at^2$		$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{v}_0 t + \dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}t^2$		$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \dfrac{1}{2}\beta t^2$
	$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$		$v^2 = v_0^2 + 2\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)$		$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\beta(\theta - \theta_0)$
惯性量	质量 m	惯性量	质量 m	惯性量	转动惯量 J
动因	力 F	动因	力 $\boldsymbol{F}$	动因	力矩 $\boldsymbol{M}$
定律	牛顿定律 $F = ma$	定律	牛顿定律 $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$	定律	转动定理 $\boldsymbol{M} = J\boldsymbol{\beta}$
动能	$\dfrac{1}{2}mv^2$	动能	$\dfrac{1}{2}mv^2$	转动动能	$\dfrac{1}{2}J\omega^2$

注 1：对于质点一维直线运动，为了保持表述的连贯性，即使是矢量，表中继续沿用中学物理的表述方法．

注 2：刚体定轴转动的角速度和角加速度也是矢量，表中只是给出计算其大小的公式，其方向的确定方法在大学物理教材中有详细的表述，这里不再赘述．

表 2　质点与刚体定轴转动的比较之二

质　　点		刚体定轴转动	
动量	$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$	角动量	$\boldsymbol{L} = J\boldsymbol{\omega}$
动量定理	$\int \boldsymbol{F}\mathrm{d}t = \boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_0$	角动量定理	$\int \boldsymbol{M}\mathrm{d}t = \boldsymbol{L} - \boldsymbol{L}_0$
动量守恒定律	$\sum \boldsymbol{F}^{\mathrm{ex}} = 0$ 时，$\boldsymbol{p} =$ 恒矢量	角动量守恒定律	$\sum \boldsymbol{M}^{\mathrm{ex}} = 0$ 时，$\boldsymbol{L} =$ 恒矢量
动能定理	$A = \int \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \dfrac{1}{2}mv^2 - \dfrac{1}{2}mv_0^2$	刚体定轴转动动能定理	$A = \int \boldsymbol{M}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\theta} = \dfrac{1}{2}J\omega^2 - \dfrac{1}{2}J\omega_0^2$
机械能转化及守恒定律			
$\sum \boldsymbol{F}^{\mathrm{ex}} + \boldsymbol{F}^{\mathrm{in}}_{\mathrm{nc}} = 0$ 时，或者只有保守内力做功，$\dfrac{1}{2}mv^2 + \dfrac{1}{2}J\omega^2 + mgh_{\mathrm{c}} + \dfrac{1}{2}\kappa x^2 =$ 恒量			

4　两个力学模型的内在统一性分析

表面上看，两个力学模型互相独立且分别遵循不同的动力学规律，好像互不相关，其实不然．

首先，所有大学物理教材[1~4] 都强调，处理刚体动力学问题遵循如下原则：

(1) 将刚体分成若干微小部分．

(2) 将每一微小部分看成一个质点．

(3) 将刚体看作是由无数质点组成的质点系．

(4) 构成刚体的任意两个质点间的距离在运动

中恒定不变.

(5) 以质点力学为基础研究刚体运动学和动力学,每一质点是局部,刚体是全局.

所以,就分析和研究问题的思路而言,这里还是将刚体当作质点看待,只不过是一个特殊的质点系.

其次,物理规律的定量描述是通过一系列数学方程表述的,如表 1 和表 2 所示.仔细分析表中对相关量和定理、定律的表述不难发现,它们描述的物理现象虽然不同,但如果剔除各个符号的具体物理意义,其数学方程的形式则是一样的.

例如,质点的动力学关系是用牛顿第二定律表述的,即

$$\boldsymbol{F}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(m\boldsymbol{v})}{\mathrm{d}t}=m\boldsymbol{a} \tag{1}$$

其中力 $\boldsymbol{F}$ 是导致质点运动状态 —— 动量 $\boldsymbol{p}$ 发生变化的原因,正是由于受到外因(力)的作用,使得质点的动量发生了变化,或者说使得质点产生了加速度 $\boldsymbol{a}$. 从式(1)可知,(惯性)质量 m 相同的物体,所受外力越大,其动量变化率和加速度越大;受力相同的物体,质量越大,其动量变化率和加速度越小,即质量越大,物体的运动状态越不易发生变化.

又比如,刚体定轴转动的动力学关系是用转动定理(角动量定理的特例)表述的,即

$$\boldsymbol{M}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(J\boldsymbol{\omega})}{\mathrm{d}t}=J\boldsymbol{\beta} \tag{2}$$

其中力矩 $\boldsymbol{M}$ 是导致刚体转动状态 —— 角动量 $\boldsymbol{L}$ 发生变化的原因,正是由于受到外因(力矩)的作用,使得刚体的角动量发生了变化,或者说使得刚体产生了角加速度 $\boldsymbol{\beta}$. 从式(2)可知,转动惯量 J 相同的物体,所受外力矩越大,其角动量变化率和角加速度越大;受力矩相同的物体,转动惯量越大,其角动量变化率和角加速度越小,即转动惯量越大,物体的转动状态越不易发生变化.

综合上述分析可知,质点或刚体的运动状态之所以会发生变化,是由于有外因的作用;外因量(力或力矩)越大,其运动状态(动量或角动量)的变化越大;惯性量(质量或转动惯量)越大,其运动状态越不易发生变化.

据此,若换一种表述,将质点和刚体动力学关系中物理意义相似的量统一用一个新的量来表述,如表 3 所示,则质点和刚体定轴转动的动力学关系可统一表述为

$$\boldsymbol{R}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{m}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(I\boldsymbol{V})}{\mathrm{d}t}=I\boldsymbol{A} \tag{3}$$

表 3　质点与刚体定轴转动部分相关量的统一

质点		刚体		统一量	
物理量	符号	物理量	符号	物理量	符号
质量	m	转动惯量	J	惯性量	I
速度	$\boldsymbol{v}$	角速度	$\boldsymbol{\omega}$	速度量	$\boldsymbol{V}$
加速度	$\boldsymbol{a}$	角加速度	$\boldsymbol{\beta}$	加速度量	$\boldsymbol{A}$
动量	$\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v}$	角动量	$\boldsymbol{L}=J\boldsymbol{\beta}$	运动量	$\boldsymbol{m}=I\boldsymbol{V}$
力	$\boldsymbol{F}$	力矩	$\boldsymbol{M}$	外因量	$\boldsymbol{R}$

通过类似的变换,当然可以得到质点和刚体定轴转动的运动学以及动力学关系的统一表述,如表 4 所示.

表 4　质点与刚体定轴转动的统一性表述

物理量的属性	量的符号或数学方程	适用于不同模型时的物理意义	
		质　点	刚体定轴转动
位置量	$\boldsymbol{P}(t)$	位置矢量	角位置
位置增量	$\Delta\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}(t+\Delta t)-\boldsymbol{P}(t)$	位移	角位移
速度量	$\boldsymbol{V}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t}$	速度	角速度
加速度量	$\boldsymbol{A}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t^2}$	加速度	角加速度
惯性量	I	质量	转动惯量
运动量	$\boldsymbol{m}=I\boldsymbol{V}$	动量	角动量

续表

物理量的属性	量的符号或数学方程	适用于不同模型时的物理意义	
		质　点	刚体定轴转动
外因量	$\boldsymbol{R}$	力	力矩
变化规律	$R=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{m}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{IV})}{\mathrm{d}t}=I\boldsymbol{A}$	牛顿第二定律	转动定理
时间累积效应	$\int\boldsymbol{R}\mathrm{d}t=\boldsymbol{m}-\boldsymbol{m}_0$	动量定理	角动量定理
运动量守恒定律	$\sum\boldsymbol{R}=0$ 时，$\boldsymbol{m}=$ 恒矢量	动量守恒定律	角动量守恒定律
动能量	$\frac{1}{2}IV^2$	动能	转动动能
动能定理	$A=\int\boldsymbol{R}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{P}=\frac{1}{2}IV^2-\frac{1}{2}IV_0^2$	质点动能定理	刚体定轴转动动能定理

5　结束语

表面上看，两个互相独立的力学模型——质点和刚体分别遵循不同的动力学规律，好像互不相关，但就其本质上而言，牛顿第二定律和转动定理所描述的都是在外因作用下，适用对象运动状态的变化与外因量之间的关系，反映相关物理量之间关系的数学方程形式上是完全一样的．本文通过对比分析这些内在联系，给出了这两个力学模型动力学关系的统一表述．本文结论对于学生更好地学习和理解刚体力学相关内容有很大的帮助．

致谢：真诚感谢陕西师范大学吴胜举、卢永智、李永放、陈玲、王元、醋燕妮等老师对本文工作的支持与帮助．

参 考 文 献

1　程守洙，江之永．普通物理学(第1册)(第4版)．北京：人民教育出版社，1982．6～143

2　马文蔚．物理学(上册)(第5版)．北京：高等教育出版社，2006．1～136

3　范中和．大学物理学(上册)(第2版)．西安：陕西师范大学出版社，2008．14～141

4　彭志华，付茂林．大学物理(上册)(第2版)．武汉：华中科技大学出版社，2009．7～75

The Inherent Uniformity of the Dynamic Relationship of Rigid Body and Mass Point

Zhang Mingduo　Hao Changchun　Mo Runyang　Shen Zhuangzhi

(College of Physics and Information Technology，Shaanxi Normal University，Xi′an，Shaanxi　710119)

Abstract: Mass point dynamics and rigid body dynamics of the axial rotation follow Newton′s second law and rotation theorem respectively，as if they are not correlate to each other. But all the two laws are essentially to describe the relationship between the change of the moving state of an applicable object and the external paramerters when external factors act on the object. And，the forms of the mathematical equations reflecting the relationship between the relevant physical quantities are exactly the same. By comparativing and analyzing the internal relationships，this paper gives the unitive expression of the dynamic equation of the two mechanic models.

Key words: mass point；rigid body；dynamic law；theorem of momentum；Newton′s second law；theorem of angular momentum；rotation theorem