

平行板电容器有关物理问题的理论推导

何崇荣

(武汉市黄陂区第一中学 湖北 武汉 430300)

张黎

(武汉市黄陂区第三中学 湖北 武汉 430317)

(收稿日期:2016-07-12)

摘要:对可看做无限大的平行板电容器电荷的分布、电容的定量表达式以及插入金属板或者电介质对电容的影响等规律做了严格的推导,旨在拓宽物理教师视野.

关键词:平行板电容器 推导 规律 电容

高中阶段关于平行板电容器的规律基本上都是直接给出,比如电荷只分布在两板内侧、电容器电容的决定式、以及插入金属板或者电介质对电容的影响,作为教师应该要掌握这些规律的由来.

1 无限大均匀带电平面激发的电场强度

电荷均匀分布于一个无限大平面上,其面密度为 σ ,其激发的静电场强怎么计算?

1.1 利用均匀带电圆盘模型推导

将无限大平面看做是无限大圆盘.如图1所示.

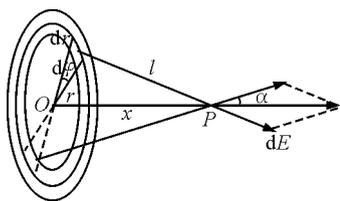


图1 无限大圆盘模型

以盘心 O 为圆心作半径各为 r 及 $r+dr$ 的圆,在作两条夹角为 $d\varphi$ 的半径,便截出一个很小的“半扇形”,因 $d\varphi$ 很小,可以认为这个半扇形为矩形,其长、宽各为 dr 及 $r d\varphi$,其面积为

$$dS = r d\varphi dr$$

其电荷量为

$$dq = \sigma dS = \sigma r d\varphi dr$$

根据点电荷场强公式,它在轴上一点 P 贡献的场强大小为

$$dE = \frac{k dq}{l^2} = \frac{k \sigma r d\varphi dr}{l^2}$$

其中 l 为半扇形和 P 点的距离,根据对称性,整个带电圆盘在轴上场强平行于轴线,因此只需对 dE 沿轴线的分量 dE_x 作积分便可求得 E ,由图可知

$$dE_x = dE \cos \alpha = \frac{k \sigma x r d\varphi dr}{(r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

静电力常量

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

对变量 r 和 x 作二重积分得

$$E = k \sigma x \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \frac{r dr}{(r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{R}{x}\right)^2}} \right]$$

对于无限大带电平面,即 $R \rightarrow \infty$,则其激发的场强

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

即

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{e}_n$$

式中 \mathbf{e}_n 为带电平面的法向单位矢量.

1.2 利用高斯定理推导

高斯定理:静电场中任一闭合曲面的 \mathbf{E} 通量等于该曲面内的电荷的代数和除以 ϵ_0 .即

$$\oiint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q_{\text{内}}}{\epsilon_0}$$

其中 $q_{\text{内}}$ 表示封闭曲面内自由电荷的电荷量.

如图2所示,过 P 点作与带电平面平行的小圆面 S_1 ,以 S_1 为底作与带电面垂直的柱体,其长度等于 P 点到带电面距离的2倍.对于无限大均匀带电平面,其电场强度 E 与带电平面垂直.由对称性可知,小平面 S_1 与 S_2 处场强大小相等,即 $E_1 = E_2$,统一记为 E ,圆柱底的面积记为 S .包在封闭柱面内的电荷为 $q_{内} = \sigma S$.

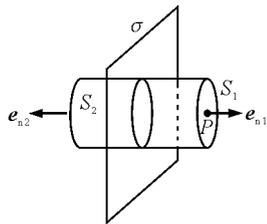


图2 以 S_1 为底与带电面垂直的柱体为高斯面
对这个封闭的圆柱面,根据高斯定理得

$$\iint_{S_1} \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{S}_1 + \iint_{S_2} \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{S}_2 + \iint_{S_{侧}} \mathbf{E}_{侧} \cdot d\mathbf{S}_{侧} = \frac{q_{内}}{\epsilon_0}$$

规定向右为正方向,则

$$\iint_{S_1} \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{S}_1 = ES$$

$$\iint_{S_2} \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{S}_2 = -E \cdot (-S) = ES$$

因侧面的 $\mathbf{E}_{侧}$ 与侧面平行,则

$$\iint_{S_{侧}} \mathbf{E}_{侧} \cdot d\mathbf{S}_{侧} = 0$$

于是

$$2ES = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$$

解得

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

即

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{e}_n$$

2 平行板电容器电荷的分布

平行板电容器电荷究竟怎么分布?高中阶段讨论的平行板电容器的电荷为什么总是分布在两板内侧?

如图3所示,长宽相等的金属平板A和B在真空中平行放置,板间间距比长宽小得多.

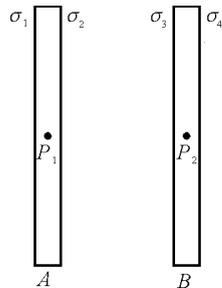


图3 长宽相等的两个金属平板平行放置

分别令每板带电 q_A 和 q_B ,由于板的长宽比距离大得多,可近似把板看成是无限大.其电荷面密度依次记为 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$.在A板内任取一点 P_1 ,设 \mathbf{e}_n 是向右的单位法矢量,根据无限大均匀带电平面激发场强公式得,4个无限大平面在 P_1 的合场强为

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} \mathbf{e}_n - \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} \mathbf{e}_n - \frac{\sigma_3}{2\epsilon_0} \mathbf{e}_n - \frac{\sigma_4}{2\epsilon_0} \mathbf{e}_n$$

静电平衡时

$$\mathbf{E} = 0$$

故

$$\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_4 = 0 \quad (1)$$

再在B板内取一点 P_2 ,类似的有

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 - \sigma_4 = 0 \quad (2)$$

$$q_A = \sigma_1 S + \sigma_2 S \quad (3)$$

$$q_B = \sigma_3 S + \sigma_4 S \quad (4)$$

联立式(1)、(2)、(3)、(4)解得

$$\sigma_1 = \sigma_4 = \frac{q_A + q_B}{2S}$$

$$\sigma_2 = \sigma_3 = \frac{q_A - q_B}{2S}$$

讨论:

(1) 对用电池给平行板电容器充电,有 $q_A = -q_B$.所以

$$\sigma_1 = \sigma_4 = 0$$

$$\sigma_2 = -\sigma_3 = \frac{q_A}{S}$$

这说明电荷只分布在两板内壁.对于可看做无限大的平行板电容器,场外任一点场强为零,两板中间任一点场强

$$E = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0}$$

即板间的电场为匀强电场,板外部空间无电场.

(2) 若分别令两板带电,则可造成 $q_A = q_B$, 于是

$$\sigma_1 = \sigma_4 = \frac{q_A}{S}$$

$$\sigma_2 = -\sigma_3 = 0.$$

这说明此时电荷将分布在两板外壁.

(3) 考虑一般性,令

$$|q_A| \neq |q_B|$$

则

$$\sigma_1 = \sigma_4 \neq 0$$

$$\sigma_2 = -\sigma_3 \neq 0$$

即四壁都有电荷.

对于可看做无限大的平行板电容器电荷分布,高中阶段,我们通常根据同号电荷相斥,异号电荷相吸来判断和理解电荷的分布规律.两板带等量电荷,可以准确判断,但两板带不等量电荷时,就无法判断了.当然高中阶段讨论的电容器,两板带的都是等量异种电荷,所以电荷只分布在电容器两板内侧.

3 平行板电容器电容的决定式

3.1 插入电介质后的电容

有电介质的高斯定理

$$\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q_0$$

电位移

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$$

真空中

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$$

ϵ_0 和 ϵ 分别为真空和电介质中的介电常量.

推导插入电介质后的电容,设两板电荷量 Q 一定,左板电荷面密度为 σ ,两板间距为 d ,电介质的宽度为 t ,介电常量为 ϵ ,该介质的相对介电常量

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$$

静电力常量

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

如图4所示,根据高斯定理,可知1和3区域电场强度相同,即

$$\epsilon_0 E_1 S = \epsilon_0 E_3 S = \sigma S$$

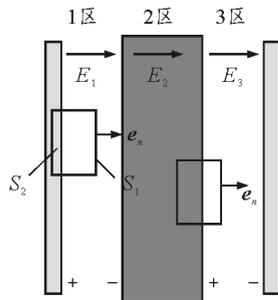


图4 插入电介质后的电容器

则

$$E_1 = E_3 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

对含有电介质的高斯面

$$\epsilon E_2 - \epsilon_0 E_1 = 0$$

则

$$E_2 = \frac{\sigma}{\epsilon}$$

两板电压

$$U = E_1(d-t) + E_2 t$$

所以此时电容器的电容

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{S}{\frac{d-t}{\epsilon_0} + \frac{t}{\epsilon}} = \frac{\epsilon\epsilon_0 S}{\epsilon(d-t) + \epsilon_0 t}$$

两板之间为真空(或空气)时,即 $t=0$,则

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 S}{d} = \frac{S}{4\pi k d}$$

两板之间充满电介质时,即 $t=d$,则

$$C = \frac{\epsilon S}{d} = \frac{\epsilon_r S}{4\pi k d}$$

结论:由插入电介质后电容公式

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d} \frac{d}{d - \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right)t} > \frac{\epsilon_0 S}{d} = C_0$$

得出:

(1) 插入电介质,相当于增大电介质的介电常量,电容增大.

(2) 若两板电荷量一定时,插入部分电介质,电容增大,两板间电压减小,1和3区域电场强度不变($E_1 = E_3 = E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$),介质中电场强度 $E_2 < E_0$.

(3) 若两板电压一定时,插入电介质,电容增大,两板所带电荷量增大.1和3区域电场强度增大,介质中电场强度 $E_2 < E_1$.

关于楞次定律教学中的几点改进

曾小妮

(北京市垂杨柳中学 北京 100017)

(收稿日期:2016-08-23)

摘要:楞次定律“楞次定律”是高中物理电磁学部分的重要内容,也是高中教学的难点.如何让楞次定律的演示实验更形象直观,让抽象晦涩的物理知识变得简单明了,是我们每个教师一直努力的方向.笔者从实验装置的改进和规律获得的途径两方面表达了一些看法.

关键词:磁场 磁通量 感应电流方向

由于楞次定律的教学过程中涉及到磁场的方向、磁通量的变化、线圈的绕向、电流的方向与指针偏转关系等多种因素的关系,所以教师教起来繁琐,学生学起来吃力.如何把多因素转化成小因素,降低学生接受的难度;另外本节的规律比较隐蔽,且内容抽象,如何引导学生设制合理的表格记录现象,引导学生去发现规律、总结规律也就显得尤为重要.为此笔者针对这两方面的问题从实验装置和探究规律方面提出了几点改进建议,供大家参考与指正.

实验装置方面,实验设计和操作中要注重实验的直观性,要有利于学生利用直觉思维进行有效教学.首先教材的实验装置中采用螺线管来判断电流方向.对学生来说要发现螺线管线圈的绕向就比较困难,无形中增加本节课的难度.虽然教学中我们不必跟学生重点分析线圈的绕向,但绕向没有弄清楚,会影响学生的思维,接受起来也特别吃力.如果改用如图1所示的矩形线圈,那么线圈的绕向十分直观,电流流向也一目了然.其次,教材中的实验,要求实

3.2 插入金属板后的电容

推导插入金属板后的电容,还是假设两板电荷量 Q 一定,根据高斯定理,可知1和3区域电场强度相同,即

$$\epsilon_0 E_1 S = \epsilon_0 E_3 S = \sigma S$$

所以 $E_1 = E_3 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$

2区域电场强度 $E_2 = 0$.则

$$U = E_1 (d - t)$$

所以插入金属板后的电容

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\epsilon_0 S}{d - t}$$

结论:

(1) 插入金属板,相当于两板间距减小,电容器电容增大.

(2) 若两板电荷量一定时,插入金属板,电容器电容增大,两板电压减小,1和3区域电场强度不变.

(3) 若两板电压一定时,插入金属板,电容器电

容增大,电荷量增大,1和3区域电场强度增大.

4 小结

(1) 对于可看做无限大平行板电容器电荷怎么分布,取决于两板所带的电荷量的大小关系.

若两板带等量异号电荷,则电荷只分布在两板内侧;若两板带等量同号电荷,则电荷只分布在两板外侧;若两板所带电荷量不等,则两板四壁都有电荷,两板外侧带等量同号电荷,两板内侧带等量异号电荷.

(2) 插入电介质,相当于增大介电常数,平行板电容器电容增大;插入金属板,相当于两板间距减小,平行板电容器电容增大.

参考文献

- 1 梁灿彬,秦光戎,梁竹健.普通物理学教程(电磁学).北京:高等教育出版社,2004,12~13,19~20,53~54,104~105