

# 圆锥曲线顶点曲率半径的物理解法

吴晓松

(重庆市涪陵第五中学 重庆 408000)

(收稿日期:2016-07-13)

**摘要:**用数学方法的曲率半径公式可以求出各类圆锥曲线在其顶点处的曲率半径,但是真要具体求解的话需要涉及对变量的一阶求导和二阶求导,从而使得曲率半径的表达式看起来比较繁杂,为此撇开数学的角度,从纯物理的方法来求解圆锥曲线顶点处的曲率半径.

**关键词:**圆锥曲线 曲率半径 物理解法

物理学中有一个普遍性的结论,即任何做匀速圆周运动物体(质点)的加速度都指向圆心.这个加速度叫向心加速度或法向加速度,表达式为: $a_n = \frac{v^2}{r}$ 或写为 $r = \frac{v^2}{a_n}$ .其中 $r$ 就是质点做匀速圆周运动的轨迹半径.当然若质点的运动轨迹不是圆周且速度大小还可变化,那么这样的曲线运动就不能直接用向心加速度公式了.但在研究时可以把曲线分割为许多很短的小段,质点在每小段的运动可看作圆周运动(曲率圆)的一部分,且速度大小几乎相等.这样在分析质点经过曲线上某点的运动时仍然可采用匀速圆周运动的方法来处理.即只要根据质点运动的轨迹方程求出其曲线上某点的线速度 $v$ 和法向加速度 $a_n$ 就可利用匀速圆周运动的结论 $r = \frac{v^2}{a_n}$ 来求出曲率半径

$$\rho = \left| \frac{v^2}{a_n} \right|$$

下面就用这种求速度和加速度的物理方法来求解圆锥曲线顶点处的曲率半径.

## 1 椭圆顶点的曲率半径

椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .现构造一个赋予物理含义的参数方程,设一个质点在 $x$ 方向的分运动为余弦式振动,振幅为 $a$ ,角速度 $\omega = 1$ ;该质点在 $y$ 方向的分运动为正弦式振动,振幅为 $b$ ,角速度 $\omega = 1$ .即

$$x = a \cos t$$

$$y = b \sin t$$

那么该质点合运动的轨迹便为椭圆了.现讨论在 $t = 2k\pi$ 时刻,其顶点 $(a, 0)$ 和 $t = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ 时刻,其顶点 $(0, b)$ 处的曲率半径.

在顶点 $(a, 0)$ 处的线速度就是 $y$ 方向的分速度,即

$$v = \frac{dy}{dt} = b \cos t = b$$

在顶点 $(a, 0)$ 处的法向加速度就是 $x$ 方向的加速度,即

$$a_n = \frac{d^2x}{dt^2} = -a \cos t = -a$$

故

$$\rho_{(a,0)} = \left| \frac{v^2}{a_n} \right| = \frac{b^2}{a}$$

同理,在顶点 $(0, b)$ 处的线速度就是 $x$ 方向的分速度,即

$$v = \frac{dx}{dt} = -a \sin t = -a$$

在顶点 $(0, b)$ 处的法向加速度就是 $y$ 方向的加速度,即

$$a_n = \frac{d^2y}{dt^2} = -b \sin t = -b$$

故

$$\rho_{(0,b)} = \left| \frac{v^2}{a_n} \right| = \frac{a^2}{b}$$

## 2 双曲线顶点的曲率半径

双曲线的标准方程为: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ,其顶点曲率

(下转第76页)

生的整个学习活动过程,不仅包括学生合理利用信息技术及网络资源达成对实验相关理论知识的理解,学生实验技能、批判性思维的养成,还关注对实验结果的分析、成果的展示及总结和实验本身的反思,即通过整个学习活动对学生从知识到能力到情感态度价值观在实验课程中的表现形成过程性的评价。

基于翻转课堂的大学物理实验教学模式彻底颠覆了传统教学模式,利用信息技术和网络环境推动学生自主学习和主动探究,促进了大学物理实验教学的发展和教育教学创新。但是,真正推行大学物理翻转课堂教学模式还有很多问题有待解决,如教师和学生对信息技术的驾驭能力、学生的自主学习习惯,以及实验室资源和技术支撑等很多因素都会影

响翻转课堂的教学效果,如何在大学物理实验中贯彻该模式,切实提高教学效果,还需要更多的来自一线实际教学的实践和探索。

### 参考文献

- 1 Petitto, L. A. & Dunbar, K. (2004). New Findings from Educational Neuroscience on Bilingual Brains, Scientific Brains and the Educated Mind. [2012 - 08 - 29]. <http://kieviet.us/transient/Petitto-Dunbar-Bilingual-Brains-Educated-Mind.pdf>
- 2 可汗学院. 可汗学院首页. [2013 - 05 - 13]. <https://www.khanacademy.org/>
- 3 Flipped Not Working. [2013 - 05 - 13]. [http://flippedclassroom.org/forum/topics/flipped-not-working?\\_id=4973855%3ATopic%3A101453&\\_page=4#comments](http://flippedclassroom.org/forum/topics/flipped-not-working?_id=4973855%3ATopic%3A101453&_page=4#comments)

(上接第71页)

半径的求法同椭圆顶点曲率半径的求法基本一致. 现构造一个赋予物理含义的参数方程. 若一个质点在  $x$  方向的分运动为  $x = a \sec t$ ; 在  $y$  方向的分运动为  $y = b \tan t$ . 那么该质点的合运动轨迹便为双曲线了. 现讨论在  $t=0$  时刻其顶点  $(a, 0)$  处的曲率半径.

在顶点  $(a, 0)$  处的线速度就是  $y$  方向的分速度, 即

$$v = \frac{dy}{dt} = b \sec^2 t = b$$

顶点  $(a, 0)$  处的法向加速度就是  $x$  方向的加速度, 即

$$a_n = \frac{d^2x}{dt^2} = a \sec t \cdot \tan^2 t + a \sec^3 t = a$$

故

$$\rho_{(a,0)} = \left| \frac{v^2}{a_n} \right| = \frac{b^2}{a}$$

### 3 抛物线顶点的曲率半径

抛物线的标准方程为:  $y^2 = 2Px$ , 现构造一个赋予物理含义的参数方程. 若一个质点在  $x$  方向做初

速度为零, 加速度  $a_n = 4P$  的匀加速直线运动, 在  $y$  方向做  $v = 2P$  的匀速直线运动. 即

$$x = \frac{1}{2} a_n t^2 = 2Pt^2$$

$$y = vt = 2Pt$$

那么该质点的合运动轨迹便为抛物线了. 显然在  $t=0$  时刻其顶点  $(0, 0)$  处的曲率半径为

$$\rho_{(0,0)} = \left| \frac{v^2}{a_n} \right| = P$$

### 4 结束语

本文先把圆锥曲线的标准方程换成了一组赋予物理含义的参数方程, 再通过参数方程求得其在顶点处的线速度  $v$  和法向加速度  $a_n$ , 然后利用匀速圆周运动向心加速度的公式, 巧妙地求得了圆锥曲线在其顶点处的曲率半径. 显然用这种物理方法比用数学方法更加清晰和简洁, 并且物理意义凸显. 值得说明的是用本文的方法还可以求出其他一些曲线在某些特殊位置处的曲率半径, 关键就在于怎样去合理构建一组简洁且具有物理意义的参数方程.