均质三角形边框刚体对其质心轴的转动惯量的简明推导

于志明

(连云港师范高等专科学校物理系　江苏 连云港　222006)

(收稿日期:2016-10-18)

摘　要:利用任意三角形的边长与顶点坐标的关系,直接推出任意三角形边框的质心到各边中点的距离与三角形各边边长的关系,从而方便地求得任意均质三角形边框刚体对其质心轴的转动惯量.

关键词:转动惯量　三角形边框　质心

刚体转动惯量的计算是刚体力学研究的重要内容. 文献[1,2]研究了任意均质三角形边框刚体对过质心且和三角形所在平面垂直轴的转动惯量的计算问题. 文献[1]利用几何方法确定任意均质三角形边框刚体的质心位置和质心到各边中点的距离,然后利用均质细杆对其中心的转动惯量和平行轴定理得到任意均质三角形边框刚体对其质心轴的转动惯量的公式. 文献[2]认为文献[1]中推导的过程比较繁琐,又给出了一种新的推导方法. 我们仔细阅读文献[2]后发现,其中推导的过程也比较繁琐,还要用到三角形边框的中点形成的内切圆,还要应用从《数学手册》中查出的有关关系式. 我们认为在计算任意均质三角形边框刚体对其质心轴的转动惯量时,最重要的是计算其质心到三边中点的距离与其边长的关系,而利用三角形的边长与顶点的坐标的关系,可以方便快捷地解决这一问题. 本文推导的方法思路清晰,计算简单,对于处理其他任意多边形边框刚体对其质心的转动惯量具有启发意义.

1　三角形的边长和顶点坐标的关系

如图 1 所示,设任意三角形(以下记为 $\triangle ABC$)的 3 个顶点分别为 A,B,C,3 边的边长分别为 a,b,c,3 个夹角分别为 α,β,γ. 建立如图所示的直角坐标系 xOy,设三角形的 3 个顶点 A,B,C 的坐标分别为 (x_1,y_1)、(x_2,y_2)、(x_3,y_3),则三角形 3 条边的边长与 3 个顶点的坐标的关系为

$$a=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \tag{1}$$

$$b=\sqrt{(x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2} \tag{2}$$

$$c=\sqrt{(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2} \tag{3}$$

由余弦定理得

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\gamma \tag{4}$$

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\alpha \tag{5}$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\beta \tag{6}$$

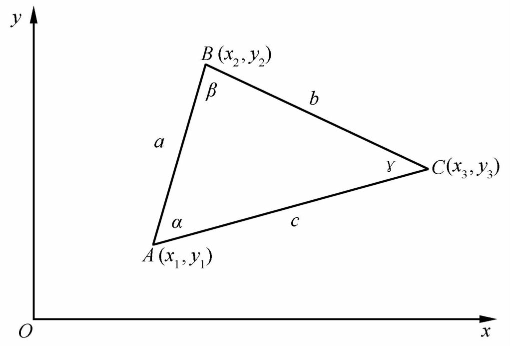

图 1　三角形边长和顶点坐标的关系分析图

如果分别从 $\triangle ABC$ 的 3 个顶点起,沿两边引两个边矢量,则由矢量的标乘得

$$(x_2-x_1)(x_3-x_1)+(y_2-y_1)(y_3-y_1)=ac\cos\alpha \tag{7}$$

$$(x_1-x_2)(x_3-x_2)+(y_1-y_2)(y_3-y_2)=ab\cos\beta \tag{8}$$

$$(x_1-x_3)(x_2-x_3)+(y_1-y_3)(y_2-y_3)=bc\cos\gamma \tag{9}$$

由式(4)～(9)得

作者简介:于志明(1960-　),男,教授,主要从事大学物理的教学和研究工作.

$$(x_2 - x_1)(x_3 - x_1) + (y_2 - y_1)(y_3 - y_1) = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2} \tag{10}$$

$$(x_1 - x_2)(x_3 - x_2) + (y_1 - y_2)(y_3 - y_2) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} \tag{11}$$

$$(x_1 - x_3)(x_2 - x_3) + (y_1 - y_3)(y_2 - y_3) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} \tag{12}$$

式(1) ～ (3) 和式(10) ～ (12) 建立了 $\triangle ABC$ 边长和顶点的坐标的关系，利用它们我们就能解决 $\triangle ABC$ 的质心到其 3 边中点的距离与三角形的边长的关系问题.

2　$\triangle ABC$ 的质心到其 3 边中点的距离与其边长的关系

由图 1 可知，$\triangle ABC$ 的 3 边 AB，BC，CA 的中点坐标分别为

$$x_{c_1} = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y_{c_1} = \frac{y_1 + y_2}{2} \tag{13}$$

$$x_{c_2} = \frac{x_2 + x_3}{2} \qquad y_{c_2} = \frac{y_2 + y_3}{2} \tag{14}$$

$$x_{c_3} = \frac{x_1 + x_3}{2} \qquad y_{c_3} = \frac{y_1 + y_3}{2} \tag{15}$$

而由 $\triangle ABC$ 的 3 边组成的质点系的质心坐标可表示为

$$x_c = \frac{a x_{c_1} + b x_{c_2} + c x_{c_3}}{a + b + c} \tag{16}$$

$$y_c = \frac{a y_{c_1} + b y_{c_2} + c y_{c_3}}{a + b + c} \tag{17}$$

将式(13) ～ (15) 代入式(16)、(17) 得

$$x_c = \frac{a(x_1 + x_2) + b(x_2 + x_3) + c(x_1 + x_3)}{2(a + b + c)} \tag{18}$$

$$y_c = \frac{a(y_1 + y_2) + b(y_2 + y_3) + c(y_1 + y_3)}{2(a + b + c)} \tag{19}$$

$\triangle ABC$ 的 3 边组成的质点系的质心到其 3 边 AB，BC，CA 中点距离的平方分别为

$$d_1^2 = (x_c - x_{c_1}{}^2) + (y_c - y_{c_1})^2 \tag{20}$$

$$d_2^2 = (x_c - x_{c_2})^2 + (y_c - y_{c_2})^2 \tag{21}$$

$$d_3^2 = (x_c - x_{c_3})^2 + (y_c - y_{c_3})^2 \tag{22}$$

将式(13)、(14)、(15)、(18)、(19) 分别代入式(20) ～ (22)，再应用式(1) ～ (3) 和式(10) ～ (12) 经化简可得

$$d_1^2 = \frac{bc(b + c - a)}{4(a + b + c)} \tag{23}$$

$$d_2^2 = \frac{ac(a + c - b)}{4(a + b + c)} \tag{24}$$

$$d_3^2 = \frac{ab(a + b - c)}{4(a + b + c)} \tag{25}$$

式(23) ～ (25) 就是我们得到的任意 $\triangle ABC$ 的质心到其 3 边中点的距离与其边长的关系式.

3　三角形边框刚体对其质心轴的转动惯量的计算

设 $\triangle ABC$ 各边单位长度的质量为 λ，利用大家熟知的均质细杆对过其中心轴的转动惯量和平行轴定理，可得 $\triangle ABC$ 的 3 边组成的质点系对与该三角形平面垂直且过其质心的轴的转动惯量为

$$I_c = \lambda\left[\frac{a^3}{12} + \frac{abc(b + c - a)}{4(a + b + c)} + \frac{b^3}{12} + \frac{abc(a + c - b)}{4(a + b + c)} + \frac{c^3}{12} + \frac{abc(a + b - c)}{4(a + b + c)}\right] = \lambda\left(\frac{a^3 + b^3 + c^3}{12} + \frac{abc}{4}\right) \tag{26}$$

参 考 文 献

1　周国全，徐富斌. 均质边框三角形刚体绕质心轴的转动惯量公式. 大学物理，2012，31(12)：8 ～ 9

2　李力. 简捷推导均质三角形边框刚体绕质心轴的转动惯量. 大学物理，2013，32(5)：19

Simple Derivation on the Rotation Inertia of a Homogeneous Triangular Frame Rigid Body to the Axis through Its Mass Center

Yu Zhiming

(Department of Physics, Lianyungang Teachers College, Lianyungang, Jiangsu 222006)

Abstract: Using the relationships between the side lengths and the coordinates of the triangle points, the distances from the mass center of the triangle frame to the midpoints of each side can be deduced directly. The rotation inertia of the rigid triangle frame about the axis through its mass center is obtained very briefly.

Key words: rotation inertia; triangle frame; mass center

(上接第 32 页)

并给出了物体上特殊点的滚动轨迹. 这种方法也能求其他曲线之间的滚动轨迹,不再详述.

参 考 文 献

1 陶涛,邱为钢. 椭圆旋轮线. 大学物理,2013,32(1):33 ~ 34

2 余守宪,唐莹. 浅析物理学中的旋轮线(摆线). 大学物理,2001,20(6):5 ~ 10

3 莱洛三角形. http://mathworld.wolfram.com/ReuleauxTriangle.html

4 摆线. http://mathworld.wolfram.com/Hypocycloid.html

The Rolling Motion between Curves

Yang Jie

(Department of Physics, Huzhou Teachers College, Huzhou, Zhejiang 313000)

Qiu Weigang

(Department of Physics, Huzhou Teachers College, Huzhou, Zhejiang 313000;
Physical Visual effects studio, Huzhou Teachers College, Huzhou, Zhejiang 313000)

Abstract: A rolling motion is composed of displacement of center of mass (COM) and rotation around COM. From constraint condition, the rotation angle parametric expressions of displacement of COM are given for two kind of rolling motion between two curves: a leaf-like body made of arcs rolling inside a regular triangle and a square and a hypocycloid rolling inside another hypocycloid. The orbits of some special point on the rolling body are also given.

Key words: rolling motion; hypocycloid; orbit