导数在高中物理中的应用*

王朝祥

（北京市第八十中学　北京　100102）

（收稿日期：2016－10－26）

摘　要：函数对自变量的瞬时变化率，称为导数．在日常教学中将导数思想渗透入物理课堂，能深化对物理概念和规律的理解，把握物理知识的内在联系；在解决实际问题时引入导数，能有效解决物理量的非均匀变化问题、极值问题，有利于提升学生应用数学知识处理物理问题的能力．

关键词：导数　瞬时变化率　极值问题

微积分的创立为人们研究变量和函数提供了重要的方法和手段．导数是微积分的核心概念之一，在解决实际问题中有着广泛的应用．

人教版高中数学教材选修2－2讲授了导数的概念，介绍了导数的几何意义、基本初等函数的导数公式及导数的运算法则，这为高中物理学习提供了全新的数学方法．笔者在日常教学中尝试着将导数思想渗透到物理课堂，教学效果良好，现与读者分享．

1　导数的数学定义

函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的瞬时变化率，称为函数在该点的导数，记作 $f'(x_0)$，即

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

导数 $f'(x_0)$ 反映函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的增减趋势和变化快慢．在图像中，导数 $f'(x_0)$ 的几何意义为：曲线 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处切线的斜率．

2　结合导数思想深化对物理概念和规律的理解

高中物理中，很多物理量都是通过变化率定义的，如：速度是位移对时间的变化率，加速度是速度对时间的变化率，力是动量对时间的变化率，功率是能量对时间的变化率，电流是电荷量对时间的变化率，感应电动势是磁通量对时间的变化率．

学过导数以后，学生知道导数就是函数对自变量的瞬时变化率．教师不妨引导学生从导数的角度重新认识瞬时速度、瞬时加速度、瞬时功率、瞬时感应电动势等物理量，这样能深化学生对物理概念、物理规律的理解，把握物理知识的内在联系，体会数学方法与物理思想的完美结合．

例如，在高中物理教材中，法拉第电磁感应定律的呈现形式为

$$E=N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

在学生掌握导数的概念和运算法则后，可以将定律拓展到磁感应强度 B 与有效面积 S 都随时间变化的复杂问题，此时磁通量

$$\Phi=B(t)S(t)$$

代入法拉第电磁感应定律可得

$$E=N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}=NB\frac{\Delta S}{\Delta t}+NS\frac{\Delta B}{\Delta t}$$

然后分 3 种情况讨论：

（1）若磁场恒定，即

$$\frac{\Delta B}{\Delta t}=0$$

感应电动势

$$E=NB\frac{\Delta S}{\Delta t}$$

这种由于回路面积变化而产生的电动势称动生电动势．

（2）若回路的面积保持不变，即

$$\frac{\Delta S}{\Delta t}=0$$

* 北京市教育科学“十二五”规划课题“高中创新实验班物理与数学课程整合实践研究”成果之一，项目编号：DBB15072

作者简介：王朝祥（1977－　），男，中教高级，主要从事中学物理教学及研究．

感应电动势

$$E = NS\frac{\Delta B}{\Delta t}$$

这种由于磁感应强度变化而产生的电动势称感生电动势.

(3)若B和S都随时间变化,此时既有动生电动势又有感生电动势,感应电动势是二者的叠加.(参见 2003 年高考江苏卷第 18 题)

上述拓展在借助数学方法打开学生思路的同时不忘回扣课本知识,有助于学生准确地理解法拉第电磁感应定律的内涵.

3　利用导数思想拓展解决问题的思路

分析和解决实际物理问题的过程离不开数学方法.将导数思想引入物理教学,能有效拓宽学生的思路,并能化解仅用初等数学知识难以解决的问题,提升学生运用数学工具处理物理问题的能力.现结合一些常见问题举例说明.

3.1　利用导数描述和研究物理量的非均匀变化

【例 1】如图 1 所示,A,B 两物体通过不可伸长的轻质细绳跨过定滑轮相连,物体 A 在拉力F作用下沿水平地面匀速向右运动,判断绳子弹力大小的变化情况.

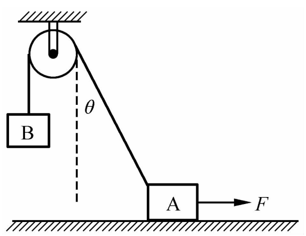

图 1　例 1 题图

分析:将物体 A 的速度记为v_A,当右侧绳子与竖直方向夹角为θ时,根据速度的合成与分解求得,物体 B 的速度大小$v_B = v_A\sin\theta$.

将v_B对时间t求导,得物体 B 的加速度大小

$$a_B = v_B{}' = v_A\omega\cos\theta$$

分析物体 B 的受力情况,由牛顿第二定律得,绳子弹力$T = m_B(g + a_B)$.

由题意,物体 A 向右运动过程中,绳子与竖直方向的夹角θ增大,绳子转动的角速度ω减小,物体 B 的加速度a_B减小,因此绳子的弹力T逐渐减小.

点评:本题中物体 B 的速度v_B随时间非均匀变化,利用初等数学方法难以计算其加速度,引入导数后,其加速度的计算迎刃而解.

3.2　利用导数研究物理极值问题

【例 2】如图 2 所示,真空中相距为$2r$的M,N两点处分别放置等量的正点电荷,电荷量大小为Q,求两电荷连线的中垂线上电场强度的极大值.

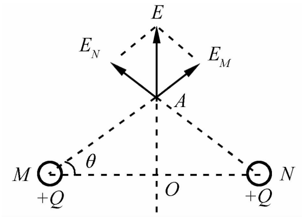

图 2　例 2 题图

分析:取两电荷连线的中垂线上任意点A,将AM与MN的夹角记为θ,A点的合场强为

$$E = 2E_M\sin\theta = 2\cdot\frac{kQ}{\left(\frac{r}{\cos\theta}\right)^2}\sin\theta =$$

$$\frac{2kQ}{r^2}\sin\theta\cos^2\theta$$

将E对θ求导

$$E' = \frac{2kQ}{r^2}[\cos\theta\cos^2\theta + \sin\theta(2\cos\theta)(-\sin\theta)] =$$

$$\frac{2kQ}{r^2}\cos\theta(1 - 3\sin^2\theta)$$

当$E' = 0$时,$\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$,此时场强有极大值

$$E_{\max} = \frac{4\sqrt{3}kQ}{9r^2}$$

点评:若函数在某点的一阶导数为零,二阶导数大于零,函数在该点取极小值;若函数在某点的一阶导数为零,二阶导数小于零,函数在该点取极大值.本题中,场强E是以θ为自变量的函数,请读者自行计算E对θ的二阶导数,体会函数的极值条件.