

再谈“光滑斜面上滑块下滑问题”的求解方法



于志明 刘丽丽

(连云港师范高等专科学校物理系 江苏 连云港 222006)

(收稿日期:2016-12-30)

摘要:给出光滑斜面上滑块下滑问题中相对运动关系,利用守恒定律和拉格朗日方程对问题进行求解.建议一些优秀的高中生学习初步的分析力学知识,以提高他们处理复杂力学问题的能力.

关键词:斜面 滑块 动量守恒 机械能守恒 拉格朗日方程

文献[1]研究了这样一道力学题:如图1所示,一质量为 M ,倾角为 θ 的光滑斜面,放置在光滑的水平面上,另一质量为 m 的滑块从斜面顶端释放.试求:

- (1) 斜面的加速度 a_M ;
- (2) 滑块相对斜面的加速度 $a_{\text{相对}}$;
- (3) 滑块的加速度 a_m .

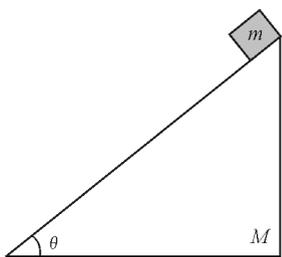


图1 题图

在文献[1]中分别利用非惯性系动力学方程和受力分析图的方法给出了此题的两种解法.这是一道考查学生物理学素养的好题,此题的其他方面的问题也受到了人们的关注[2].本文先建立滑块与斜面的相对运动关系,然后给出此题的两种解法:一种解法是利用守恒定律,这是牛顿力学中求解这道题的比较简单的方法;另一种解法是运用拉格朗日方程,这种方法要求学生掌握初步的分析力学知识.我们认为,在今天的高中物理教学中,牛顿力学受到了高度关注,而对牛顿力学之后发展起来的力学高峰——分析力学,没有给予适当的关注.我们建议,当

前的一些优秀的高中生学习初步的分析力学知识,如虚功原理和保守力系的拉格朗日方程,这对于丰富他们的物理学知识,提高他们处理复杂力学问题的能力,使他们在各种考试竞赛中取得好成绩是大有帮助的[3],这也可以作为部分高中物理教学改革发展的一个方向.

1 滑块与斜面相对运动关系的数学表示

建立如图2所示的直角坐标系 $O-xy$,该坐标系在空间固定不动,其原点在刚开始运动时斜面的顶点.设某一时刻斜面右边线的水平坐标为 X ,滑块在斜面上下滑的距离为 s ,则此时滑块在直角坐标系 $O-xy$ 中的坐标为

$$x = X - s \cos \theta \quad (1)$$

$$y = s \sin \theta \quad (2)$$

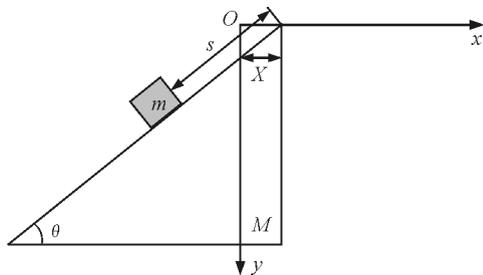


图2 建立直角坐标系

式(1)、(2)也是滑块与斜面相对运动的坐标关系的数学表示.将式(1)、(2)的两边分别对时间 t 求导数得

$$v_x = v_M - v_{\text{相对}} \cos \theta \quad (3)$$

$$v_y = v_{\text{相对}} \sin \theta \quad (4)$$

式(3)、(4)中的 v_x, v_y 是滑块的速度在直角坐标系 $O-xy$ 的两坐标轴上的投影, v_M 是斜面在水平面上运动的速度, $v_{\text{相对}}$ 是滑块在斜面上下滑的相对速度. 式(3)、(4)就是滑块与斜面相对运动的速度关系的数学表示. 将式(3)、(4)的两边再对时间 t 求导数得

$$a_x = a_M - a_{\text{相对}} \cos \theta \quad (5)$$

$$a_y = a_{\text{相对}} \sin \theta \quad (6)$$

式(5)、(6)中的 a_x, a_y 是滑块的加速度在直角坐标系 $O-xy$ 的两坐标轴上的投影, a_M 是斜面在水平面上运动的加速度, $a_{\text{相对}}$ 是滑块在斜面上下滑的相对加速度. 式(5)、(6)就是滑块与斜面相对运动的加速度关系的数学示.

以上得到的这些相对运动关系,在这道题的求解过程中是十分重要的.

2 利用守恒定律来求解

我们知道由滑块和斜面组成的系统在直角坐标系 $O-xy$ 中的水平方向的动量是守恒的,由此得

$$mv_x + Mv_M = 0 \quad (7)$$

由滑块和斜面组成的系统在直角坐标系 $O-xy$ 中的机械能是守恒的,由此得

$$mgs \sin \theta = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) + \frac{1}{2}Mv_M^2 \quad (8)$$

由式(3)、(7)可得

$$v_M = \frac{m}{m+M}v_{\text{相对}} \cos \theta \quad (9)$$

将式(9)代入式(7)得

$$v_x = -\frac{M}{m+M}v_{\text{相对}} \cos \theta \quad (10)$$

将式(4)、(9)、(10)代入式(8)得

$$2gs \sin \theta = \frac{M+m \sin^2 \theta}{m+M}v_{\text{相对}}^2 \quad (11)$$

将式(11)两边对时间 t 求导数可得

$$a_{\text{相对}} = \frac{(m+M) \sin \theta}{M+m \sin^2 \theta} g \quad (12)$$

将式(9)两边对时间 t 求导可得

$$a_M = \frac{m}{m+M} a_{\text{相对}} \cos \theta \quad (13)$$

将式(12)代入式(13)得

$$a_M = \frac{m \sin \theta \cos \theta}{M+m \sin^2 \theta} g \quad (14)$$

将式(12)、(14)代入式(5)、(6)得

$$a_x = -\frac{M \sin \theta \cos \theta}{M+m \sin^2 \theta} g \quad (15)$$

$$a_y = \frac{(m+M) \sin^2 \theta}{M+m \sin^2 \theta} g \quad (16)$$

所以

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \frac{\sin \theta \sqrt{M^2 + m(m+2M)} \sin^2 \theta}{M+m \sin^2 \theta} g \quad (17)$$

在已经求得滑块和斜面在直角坐标系 $O-xy$ 中运动的加速度以后,我们还可以求得滑块和斜面以及斜面和水平面之间的相互作用力.

3 利用拉格朗日方程来求解

我们大家知道,分析力学是在牛顿力学之后力学理论发展的一个里程碑,对于求解比较复杂的力学问题,分析力学的方法要比牛顿力学的方法优越得多.

在分析力学中,受到理想约束(如光滑面、光滑线、光滑铰链、刚性杆、不可伸长的绳的约束)的保守系的基本动力学方程为拉格朗日方程,下边我们用拉格朗日方程来求解这道题.

以滑块和斜面作为研究的系统,该系统是受到理想约束的保守系.要确定滑块和斜面的空间位置只要2个独立参量,我们就选择图2中的 X 和 s ,显然由 X 就确定了斜面的位置,而由 s 就确定了滑块相对于斜面的位置.

系统的动能为

$$T = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) + \frac{1}{2}Mv_M^2 \quad (18)$$

将式(3)、(4)代入得

$$T = \frac{1}{2}m(v_M^2 + v_{\text{相对}}^2 - 2v_M v_{\text{相对}} \cos \theta) + \frac{1}{2}Mv_M^2 \quad (19)$$

系统的势能可以表示为

$$V = -mgs \sin \theta \quad (20)$$

系统的拉格朗日函数为

$$L = T - V =$$

$$\frac{1}{2}m(v_M^2 + v_{\text{相对}}^2 - 2v_M v_{\text{相对}} \cos \theta) + \frac{1}{2}Mv_M^2 + mgs \sin \theta \quad (21)$$

将 L 代入拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v_M} \right) - \frac{\partial L}{\partial X} = 0 \quad (22)$$

和

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v_{\text{相对}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial s} = 0 \quad (23)$$

得

$$m(a_M - a_{\text{相对}} \cos \theta) + Ma_M = 0 \quad (24)$$

$$a_{\text{相对}} - a_M \cos \theta - g \sin \theta = 0 \quad (25)$$

由式(24)、(25)可解得 $a_{\text{相对}}$ 和 a_M , 结果同前. 其余略.

试想如果我们将图1所示的问题改为图3所示的问题, 这时我们用拉格朗日方程来求解比用牛顿

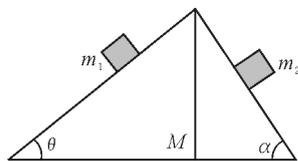


图3 拓展

参考文献

- 1 吴好. 用受力分析图分析光滑斜面上滑块下滑问题. 中学物理, 2012, 30(19): 73 ~ 74
- 2 何述平. 一个力学问题的一对内力做功的探讨. 物理教师, 2012, 33(8): 43 ~ 44
- 3 袁张瑾. 竞赛中巧用“元功法”求解的平衡问题. 物理教学, 2012, 34(8): 56 ~ 57

(上接第3页)

定律的表达式 $F=ma$ 出发, 当合外力 $F_{\text{合}}=0$, 则 $a=0$, 表示物体保持静止或匀速直线运动状态, 物体的运动状态并不改变, 做惯性运动, 即牛顿第一定律. 这表述中存在较明显的概念错误, 首先牛顿第二定律是受力作用下物体的运动规律, 它不能包括不受力作用下物体的运动规律(牛顿第一定律); 其次合外力为零 $F_{\text{合}}=0$, 不是不受力, 虽然 $a=0$, 物体保持静止或匀速直线运动状态, 这与牛顿第一定律描述的物体不受外力作用时, 保持静止或做匀速直线运动(即惯性运动)有本质的区别, 它们只是有一样的外在运动形式; 最后第二定律是建立在物体“受力”的真实实验基础上的一般情形下的规律, 不能逻辑的推断出 $F \propto 0$ 的理想极限情况下的运动, 因为任何事物一旦达到它的极限情形时, 便要发生质的改变, 出现了和一般情形的质的差别.

4 小结

没有牛顿第一定律, 就没有惯性、惯性运动、惯性参照系和力的科学概念, 牛顿第二定律也就无从谈起. 从哲学层面上, 如果我们不知道物体在不受外力的情况下处于什么样的运动状态, 要研究物体在外力的作用下将怎样运动是不可能的. 因而把牛顿

第一定律看成是牛顿第二定律的特例, 进而产生牛顿第二定律可以取代牛顿第一定律的认识, 不过是一种形式上本末倒置的解释. 它割裂了牛顿第一定律与第二定律之间的逻辑结构关系, 扭曲了牛顿第一定律的内涵, 从而抹杀了牛顿第一定律的独立性. 牛顿第一定律的基础性具有不可取代的地位, 它与牛顿第二、三定律并列, 一起构成了统一的运动定律, 并与万有引力定律一起建立了完整的牛顿力学体系.

参考文献

- 1 漆安慎, 杜婵英. 力学(第2版). 北京: 高等教育出版社, 2005
- 2 郭洪梅. 牛顿第一定律的是与非. 中学物理教学参考, 2015, 44(1): 66
- 3 张三慧. 力学(第2版). 北京: 高等教育出版社, 2005
- 4 冯杰. 大学物理专题研究. 北京: 清华大学出版社, 2011
- 5 王宏伟. 牛顿定律与17世纪牛顿的时空观. 淮南师范学院学报, 2010, 12(63): 90 ~ 92
- 6 张东升. 牛顿第一定律的建立及其哲学意义. 物理教师, 2016, 37(5): 70 ~ 73
- 7 张立久. 牛顿第一定律是牛顿第二定律的特例吗. 物理教学探讨, 2015(7): 61 ~ 63