

# 一种严谨的“割补法”

——谈谈不均匀容器类压强题的解法

陈显盈

(温州中学 浙江温州 325000)

尤爱惠

(温州市南浦实验中学 浙江温州 325000)

(收稿日期:2016-01-07)

**摘要:**对于不均匀容器类的压强题,往往采用一种不严谨的“割补法”,本文分析了一种严谨的“割补法”,并介绍了“补充法”“割除法”“简化法”“膨胀法”“综合法”等一系列其他解法。

**关键词:**压强题 解法 割补法 补充法 割除法

对于液体压强竞赛题,涉及的容器往往不是上下粗细均匀的柱体状容器(如圆柱体、长方体等),而是上细下粗或上粗下细的不均匀容器(如圆台、棱台等),下面结合一道典型的压强竞赛题分析其解法。

## 1 例题再现

**【题目】**如图1所示,甲、乙两只完全相同的圆台状容器内,分别装有质量相等的水和煤油,置于水平桌面时,设两容器内液体对底部的压强分别是 $p_1$ 和 $p_2$ ,关于两压强的大小,下列说法正确的是

- A.  $p_1 > p_2$       B.  $p_1 = p_2$   
C.  $p_1 < p_2$       D. 无法确定

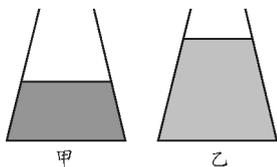


图1 例题平面示意图

液体压强涉及两条公式: $p = \rho gh$ 和 $p = \frac{F}{S}$ ,该题

无论采用哪条公式都无法直接比较 $p$ 的大小,参考文献[1]对该题的解法进行了分析,指出一种常见的“割补法”解法(图2)是错误的,那么该题能不能采用“割补法”解题呢?

下面笔者结合教学经验,再谈一谈该类压强竞赛题的各种解法。

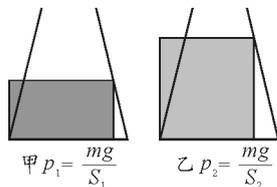


图2 割补法平面示意图

## 2 解法分析——割补法

### 2.1 错误解法

许多参考资料采用一种在平面示意图上直接割补成圆柱体的“割补法”进行解题.如图2所示,先将两圆台容器都割补成圆柱体容器,根据 $p = \rho gh$ ( $\rho$ 和 $h$ 不变)可知 $p$ 都各自不变.割补后,根据

$$p = \frac{F}{S} = \frac{mg}{S}$$

因 $m$ 相等甲的 $S$ 大,可知甲中的压强 $p$ 较小(即 $p_1 < p_2$ ),答案为C.该答案是正确的,但其解法是不严谨的,只是根据圆柱和圆台的截面积相等进行割补,实际上能否割补出圆柱体或者割补后的体积是否相等有待分析。

### 2.2 错法解析

(1) 能否割补出圆柱体。

文献[1]指出:采用该方式不能将圆台容器经过一次割补变成圆柱体容器.如图3所示,圆台是立体的,通过图2的割补方法都无法变为圆柱体.如果容器不是圆台而是棱台,才可以用该割补方式直接

变为长方体。

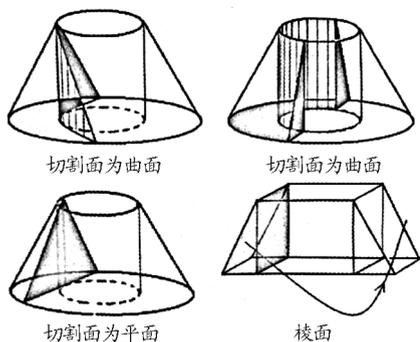


图3 圆台(或棱台)切割立体示意图

(2) 割补出的圆柱体体积是否相等。

如图4所示,假如通过多次割补将圆台变成圆柱体,割补前后体积相等吗? 设圆台上、下底面的半径分别为  $R_{上}$  和  $R_{下}$ , 根据圆台体积公式可得

$$V_{圆台} = \frac{\pi(R_{上}^2 + R_{下}^2 + R_{上}R_{下})h}{3}$$

而割补后的圆柱半径为  $\frac{(R_{上} + R_{下})}{2}$ , 体积为  $V_{圆柱} = \frac{\pi(R_{上} + R_{下})^2 h}{4}$ , 可见割补前后两者体积并不相等, 所以该割补方式是错误的。

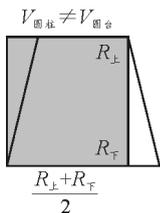


图4 割补法示意图(体积不相等)

### 2.3 严谨解法

那么,该题能不能采用“割补法”解题呢? 其实是可以的,只不过需根据体积相等原理进行割补. 如图5所示,在理论上是可以要将上、下底面积分别为  $S_{上}$  和  $S_{下}$  的圆台容器通过多次精细化割补变成一个圆柱体的容器,其底面积为

$$S_{平均} = \frac{(S_{上} + S_{下} + \sqrt{S_{上}S_{下}})}{3}$$

此时液体压强  $p$  不变. 再结合图6,对于甲情况( $S_{下}$  相等而  $S_{上}$  较大),可得甲中的  $S_{平均}$  较大;再根据公式  $p = \frac{mg}{S_{平均}}$  ( $m$  相等而  $S_{平均}$  较大),可知甲中压强  $p$

较小(即  $p_1 < p_2$ ), 正确答案为 C.

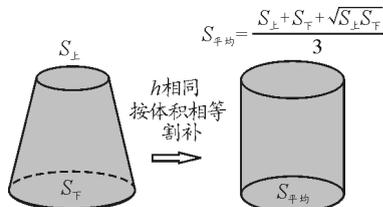


图5 割补法立体示意图(体积相等)

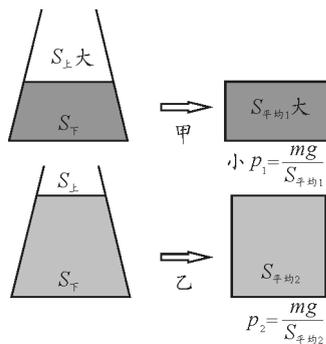


图6 割补法平面示意图(体积相等)

### 3 其他解法

可见,对于圆台等容器可以采用“割补法”,但其解法比较繁琐,其实该题可以采用其他简单的“补充法”“割除法”等解法。

#### 3.1 补充法

如图7所示,将圆台补充后得到圆柱体,此时压强  $p$  各自不变( $h$  和  $S$  不变). 可得,甲中补充的液体质量  $\Delta m$  较小(即  $\Delta m_1 < \Delta m_2$ ), 根据公式

$$p = \frac{F}{S} = \frac{(m + \Delta m)g}{S}$$

可知,甲中液体压强  $p$  较小(即  $p_1 < p_2$ ), 答案为 C.

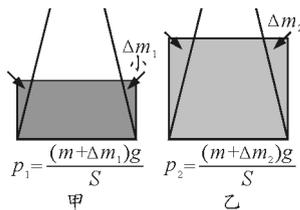


图7 补充法

#### 3.2 割除法

如图8所示,将圆台割除后得到圆柱体,此时压强  $p$  各自不变. 可得,甲中割除的液体质量  $\Delta m$  较大(即  $\Delta m_1 > \Delta m_2$ ), 根据公式

$$p = \frac{F}{S'} = \frac{(m - \Delta m)g}{S'}$$

可知,甲中液体压强  $p$  较小(即  $p_1 < p_2$ ).

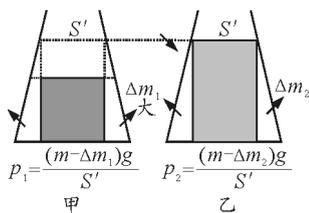


图8 割除法

### 3.3 简化法(简化容器形状)

如图9所示,为了解题方便可将两圆台容器简化为由两段柱体组成的容器,简化后底部液体压强  $p$  也各自不变.甲中的压强

$$p_1 = \frac{F_1}{S} = \frac{mg}{S}$$

而乙比甲多了一部分容器对液体向下的压力  $\Delta F$ ,所以乙中的压强

$$p_2 = \frac{F_2}{S} = \frac{(mg + \Delta F)}{S}$$

可得

$$p_1 < p_2$$

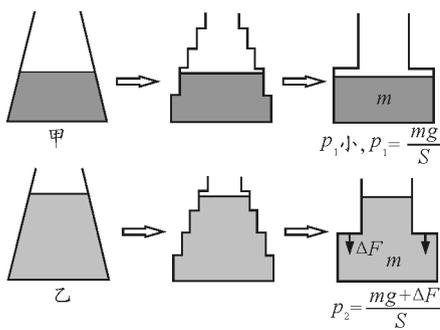


图9 简化法

### 3.4 膨胀法(转移法)

如图10所示,可以将乙液体看成由甲液体热膨胀得到(密度不相等).热膨胀后液体体积增大,部分液体从两侧往中间位置转移,导致中间位置的压强增大,可见膨胀后液体压强也增大(即  $p_1 < p_2$ ).

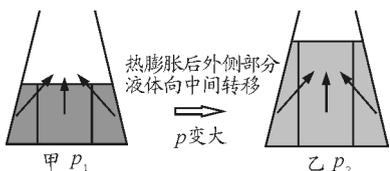


图10 膨胀法

### 3.5 综合法

#### (1) 简化法 + 膨胀法

如图11所示,先用简化法将圆台简化为两段柱体;再用膨胀法,同理热膨胀后液体会从两侧往中间位置转移,从而导致液体压强增大(即  $p_1 < p_2$ ).该综合法比单一的膨胀法更容易看出膨胀后液体从两侧往中间位置转移.

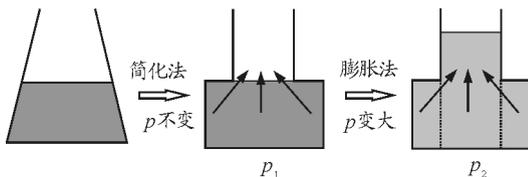


图11 简化法 + 膨胀法

#### (2) 替代法 + 膨胀法<sup>[1]</sup>

如图12所示,先用替代法,将甲圆台容器用一个圆柱体容器替换( $m$ 和 $h$ 不变),可得  $p'_1 = p_1$ ;再将圆柱体中的液体进行热膨胀,可得  $p''_1 = p'_1$ ;再把原圆台中的液体也进行膨胀,可得膨胀后圆台中的液面会比圆柱体中的液面要高,可得  $p_2 > p''_1$ ;最后推导可得  $p_2 > p''_1 = p'_1 = p_1$ ,答案为C.

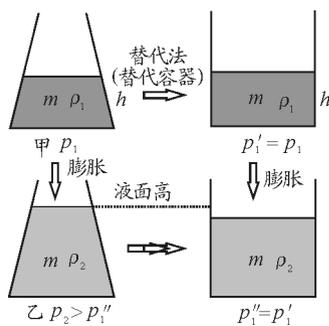


图12 替代法 + 膨胀法

总之,该类容器粗细不均匀的压强竞赛题可以采用“割补法”,对于棱台等容器可以在平面图上直接割补成柱体进行解题;对于圆台等容器,需先结合体积相等原理割补成圆柱体再解题.除了“割补法”外,还可用“补充法”“割除法”“简化法”等多种方法进行解题,其解题关键是如何将上下粗细不均匀的容器转化为粗细均匀的容器.

### 参考文献

1 王伟民. 不能将立体图当作平面图处理. 中学物理教学参考, 2015(8): 18 ~ 19