

电荷摆球平衡问题

褚会锋

(菱湖中学 浙江 湖州 313018)

邱为钢

(湖州师范学院理学院 浙江 湖州 313000)

(收稿日期:2016-01-09)

摘要:分析了电荷摆球平衡问题“陷阱”,问题来自两个带电小球相对位置的特殊性,即位于同一竖直线上.对于特殊情况,详细分析了平衡稳定位形和稳定性与各参数的关系.

关键词:电荷摆球 平衡 稳定性

中学物理力电模块一个常见的模型是电荷摆球,一个带电小球 B 固定,另一个带电(同种电荷)小球 A 悬挂,求体系平衡时的位形.固定小球 B ,悬挂点 O ,悬挂小球 A 这三者位置没有限制,可以任意摆放.如果出题者偏要把固定小球放在悬挂点的下方,这时就会出现文献[1]所指出的“陷阱”问题,当两个小球电量完全消失后,用力相似三角形和极限法计算得到的绳子拉力不一样.我们先分析一般情况,说明“陷阱”问题的根源,然后就特殊情况详细分析体系平衡时满足的条件以及平衡的稳定性判据.

设一般情况下悬挂点为 O ,摆球为 A ,固定球为 B , BA 连线与 O 点正下方直线交于点 C ,如图 1 所示.

设绳子中张力为 T ,摆球 A 重力 $G = mg$,两球库仑力为 F ,绳长 $OA = l$, $OC = h$, $AC = d$,那么由力相似三角形,得到

$$\frac{G}{h} = \frac{T}{l} = \frac{F}{d} \quad (1)$$

与文献[1]特殊情况不同,这里的 h 是变化的,当两球电荷逐渐变小到零时, $F \rightarrow 0$, $d \rightarrow 0$, $h \rightarrow l$, $T \rightarrow G$,没有矛盾,也没有“陷阱”.出现“陷阱”问题的根源在于题目设计得太巧了,固定小球正好在悬挂点的正下方.

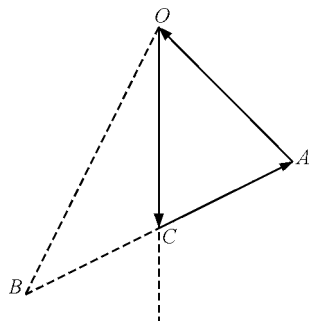


图 1 电荷摆球示意简图

我们利用能量(势能)方法^[2]来求体系的平衡位形以及判断平衡位形的稳定性.为简单考虑,只

图 2 为卫星在轨道上绕行时具有的能量和轨道半径的示意图,一个轨道对应一个能量;确定的能量对应一个确定的轨道.所以卫星的能量只有满足式(7),卫星才能绕行于稳定的轨道上.对于在图上的 A 点和 B 点:其一,当卫星从 r_2 轨道运行至 r_1 轨道的过程中克服阻力做的功若大于 $E(r_2) - E(r_1)$,则卫星最后无法稳定于 r_1 上,其轨道半径会继续减

小;其二,卫星在变轨时,能量是不守恒的,不仅仅是势能转化为动能,还必须损失一部分的能量才可以使卫星从大轨道绕行变换到小轨道绕行.

参考文献

- 1 吴敏,承开.高中物理重难点 16 讲.上海:上海交通大学出版社,2006.71 ~ 74

讨论固定小球 B 在悬挂点的正下方这种情况. 此时 h 不变, 摆球 A 与垂直线的夹角是 θ , 体系的势能为重力势能和相互作用电势能之和

$$E = -mgl \cos \theta + \frac{kq_1 q_2}{\sqrt{h^2 + l^2 - 2hl \cos \theta}} \quad (2)$$

定义一个长度量为

$$\frac{mg}{kq_1 q_2} = \frac{1}{l_0^2} \quad (3)$$

并设 $\frac{h}{l} = \lambda$, $\frac{l_0}{l} = \eta$, 以 mgl 为能量单位, 量纲归一化

后的总势能为

$$E' = \frac{E}{mgl} = -\cos \theta + \frac{\eta^2}{\sqrt{\lambda^2 - 2\lambda \cos \theta + 1}} \quad (4)$$

由式(4), 求得总势能对偏移角 θ 的偏微分

$$\frac{\partial E'}{\partial \theta} = \left[1 - \frac{\eta^2 \lambda}{(\lambda^2 - 2\lambda \cos \theta + 1)^{\frac{3}{2}}} \right] \sin \theta \quad (5)$$

系统的平衡位形对应于 $E'(\theta)$ 的极值点, 一般有两个, 一个是 $\theta = 0$, 另一个是以下方程的解

$$\cos \theta = f(\eta, \lambda) = \frac{1}{2} (\lambda + \lambda^{-1} - \eta^{\frac{4}{3}} \lambda^{-\frac{1}{3}}) \quad (6)$$

利用数学软件, 很容易在 (η, λ) 平面上画出 $f(\eta, \lambda) = 1$ 的曲线, 如图2所示.

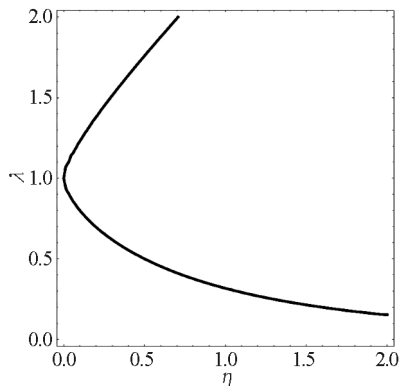


图2 参数 (η, λ) 上的平衡位形类别分界线

这个曲线是一个分界线, 在这个曲线左边, $f(\eta, \lambda) > 1$, 式(6)无解, 系统只有 $\theta = 0$ 的平衡位形; 在这个曲线右边, $f(\eta, \lambda) < 1$, 系统有 $\theta = 0$ 和 $\theta = \arccos[f(\eta, \lambda)]$ 两种平衡位形. 解析计算表明, 在 $\theta = \arccos[f(\eta, \lambda)]$ 的平衡位形处, 量纲归一化后的总势能 E' 近似为开口向上的抛物线, 意味着这种平衡是稳定平衡. 在 $\theta = 0$ 的平衡位形处, 令 $\Delta\theta = \varphi$, 把量

纲归一化后的总势能式(4)展开到 φ 的两次方, 得到

$$E' = \left(-1 + \frac{\eta^2}{|1 - \lambda|} \right) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\lambda \eta^2}{|1 - \lambda|^3} \right) \varphi^2, \lambda \neq 1 \quad (7)$$

由平衡稳定性判据条件可知, 当

$$\eta^2 < \frac{|1 - \lambda|^3}{\lambda}$$

时, $\theta = 0$ 的平衡位形是稳定平衡; 当

$$\eta^2 > \frac{|1 - \lambda|^3}{\lambda}$$

时, $\theta = 0$ 的平衡位形是不稳定平衡. 当 $\lambda = 1$ 时, 即悬线长度等于悬挂点到固定小球的距离, 如果两个电荷不变, 偏移角 θ 趋向于零, 两个带电小球的库仑力趋向无穷大, 系统不可能到达 $\theta = 0$ 的位形. 这时, 量纲归一化的总势能为

$$E' = -\cos \theta + \frac{\eta^2}{\sqrt{2(1 - \cos \theta)}} \quad (8)$$

总势能对偏移角 θ 的偏微分

$$\frac{\partial E'}{\partial \theta} = \left[1 - \frac{\eta^2}{(2 - 2\cos \theta)^{\frac{3}{2}}} \right] \sin \theta \quad (9)$$

由式(9)可以看出, 当 $\lambda = 1$ 时, 只有当 $\eta < 2^{\frac{3}{4}}$ 时, 体系才有 $\theta = \arccos\left(1 - \frac{\eta^{\frac{4}{3}}}{2}\right)$ 的平衡位形, 且是稳定平衡. 当 $\eta \geq 2^{\frac{3}{4}}$, 体系在 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 的任何位置不能平衡, 必须施加约束或外加力才能平衡, 一旦撤销约束, 摆球就向 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 方向做圆周运动, 具体运动状况将在后文分析.

高中物理各级各类考题大部分来自理论模型, 理论模型中的物理参数、数学参数(几何形状、空间维数、相对位置等)千变万化, 不能只局限于最简单的情形, 这样才能开阔思路, 提升物理思维的周到紧密性.

参考文献

- 何海明. 电荷摆球平衡问题的陷阱. 中学物理教学参考, 2013, 42(11): 52 ~ 53
- 黄尚鹏. 用能量的观点求解平衡问题例析. 物理教学, 2014(6)