竞赛与
物理专题研修

巧算均匀带电半球壳之间的静电力

郑　金

（凌源市职教中心　辽宁 朝阳　122500）

（收稿日期：2016－03－22）

摘　要：利用静电平衡导体的特点和叠加原理探讨了均匀带电球壳任意两部分对其内部带电体的静电力的性质；利用马德堡半球两部分相互作用力的结论和类比法解答两道有关均匀带电半球壳相互作用力的竞赛题.

关键词：球壳　静电力　马德堡半球

对于两个均匀带电半球壳之间相互作用的静电力的大小，用类比法计算，比较简单. 如图 1 所示，半径为 R 的马德堡半球内部抽成真空，外部大气压强为 p_0，那么将两个半球拉开所需的力 F 为多大？

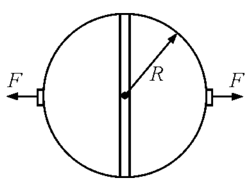

图 1　马德堡半球示意图

取右侧半球壳为研究对象，空气压强 p_0 作用于球面各处的压力 N 的方向沿法线指向球心，如图 2 所示. 其中大圆可代表任一垂直于端面的窄条球带.

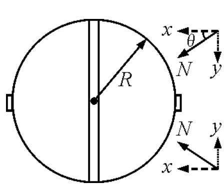

图 2　马德堡半球受力分析

由对称性可知，y 方向的分力相互抵消，仅 x 方向的分力方向相同，都垂直于分界面，大小为 $\Delta F_x = p_0 \Delta S\cos\theta = p_0 \Delta S_y$，由此可知，窄条球带上的各部分窄条小矩形受到大气产生的沿 x 方向压强相同，大小都为 p_0，而半球壳在垂直于 x 方向的有效面积即半球壳的端面面积为 $S = \pi R^2$，因此 x 方向的总压力大小为 $F_x = p_0 \pi R^2$，则所需拉力大小为 $F = p_0 \pi R^2$. 总之，球冠曲面受到大气压力的大小等于球冠底面积与大气压之积. 利用该结论和类比法求解有关均匀带电半球壳之间的作用力问题，可化繁为简.

对于均匀带电球壳，若在球心放一个点电荷，设想把球壳任意切割成两部分，如图 3 所示，那么这两部分球冠对点电荷的静电力大小关系如何？可把较大的球冠再切割成两部分，其中一部分球冠与较小的球冠相同，而另一部分球带对点电荷的静电力为零，所以点电荷受到球壳的两部分球冠的作用力大小相等，方向相反，而与两部分球冠的大小无关.

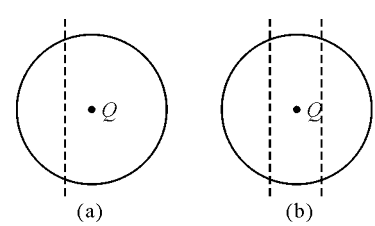

图 3　均匀带电球壳内球心有一点电荷，分析静电力

如果点电荷不是放在球心，那么该结论是否成立呢？先从平面带电圆环对其中的带电体的静电力进行分析.

如图 4(a) 所示，圆环均匀带电，电荷量为 $2q$，若在内部放一个点电荷 Q，则 Q 不受电场力的作用. 设想以 Q 所在位置和圆心的连线的垂线为分界线，将圆环切割成上下两部分. 由于在圆环内的圆面上各点处的场强为零，那么点电荷 Q 受到上下两部分圆弧的静电力的合力为零. 由此可知，点电荷受到两个圆弧的静电力大小相等，方向相反，而且点电荷与圆弧之间的静电力方向垂直于分界线，如图 4(b)、(c)

所示.

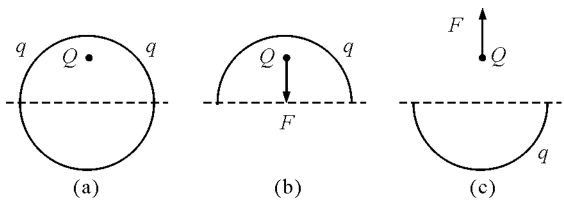

图 4　均匀带电圆环所在平面,环内有一点电荷的受力分析

但如何计算这两部分均匀带电的圆弧对点电荷的作用力的大小却很难.由平面拓展到空间,对于均匀带电球壳,内部场强处处为零,那么切割成任意两部分球冠,在内部任意一点产生的场强的矢量和为零.因此,若将球壳切割成任意两部分,则对内部任意位置的点电荷的静电力的合力都为零.于是由叠加原理可知,对于放在球壳内部的带电体,无论形状如何,放在什么位置,也无论相对方位如何,都不受电场力的作用,但由于它是带电体,因此实质是受到两部分球冠的电场力的合力为零,即如果将球壳切割成两个球冠,无论在何处切割,无论两部分大小如何,对其中带电体的静电力的合力都为零,即带电体受到一对平衡力,大小相等,方向相反.这是均匀带电球壳的一个性质,或者说是处于静电平衡状态的空腔物体的任意两部分对其内部带电体产生静电力的一个性质,可用来比较两个静电力的大小,尽管无法计算两个静电力的大小.这是电场叠加原理的体现.

从球壳切割成两部分的角度来考虑球壳对其中带电体的静电力,与从球壳整体的角度来考虑对其中带电体的静电力是一致的,前者是隔离法,后者是整体法.

1　正对等大半球壳

【例 1】两个完全相同的半球紧密接触合在一起,组成一个完整的金属球,球的半径为 R,带电荷量为 Q,求这两个半球之间相互作用的静电斥力为多大?

解析:电荷均匀分布于导体球表面,面密度为

$$\sigma=\frac{Q}{4\pi R^2}$$

可以证明,对球壳上的任一点而言,若除去该点电荷,则其余部分在该点产生的场强大小都为

$$E=2\pi k\sigma=k\frac{Q}{2R^2}$$

方向都沿法线方向.这与马德堡半球受到空气压强 p_0 作用于球面各点的压力方向都沿法线指向球心相似.在球壳上取一微小圆面,可视为点电荷,受到其余部分的静电力,可知微小圆面受到的电场力的压强为

$$p=\frac{\Delta F}{\Delta S}=\frac{\Delta QE}{\Delta S}=E\sigma$$

半球壳上的各点受到静电力的合力大小等于球冠端面上受到的压力大小,即

$$F=\pi R^2 p$$

所以两个球冠的相互作用力为

$$F=\frac{kQ^2}{8R^2}$$

由上述推导过程可知,如果半径为 R 的两个完全相同的绝缘半球壳表面均匀带等量异号电荷,电荷量为 Q,则相互吸引力的大小仍然为

$$F=\frac{kQ^2}{8R^2}$$

2　正对大小半球壳

【例 2】如图 5 所示,两个非导体半球的球心及最大横截面重合,半径分别为 R 和 r,带电荷量分别为 Q 和 q(均匀分布在半球面上),求两个半球壳的相互作用力.

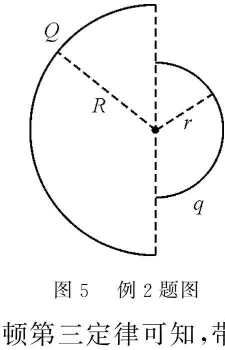

图 5　例 2 题图

解析:由牛顿第三定律可知,带同号电荷的两个半径不同的半球壳的相互作用力大小相等,方向相反,如图 6 所示.下面证明两个半径不同的半球壳之间相互作用力的大小与二者同向放置或反向放置无关.

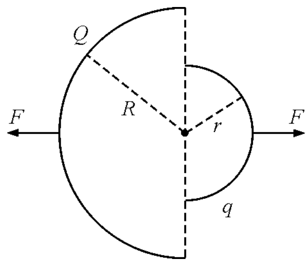

图 6　例 2 中受力分析

设想对系统补加半径为 R，带电荷量为 Q 的半球壳，如图 7 所示. 由于完整的均匀带电球壳内部的合场强为零，所以球壳被切成左右相等的两个球冠对球壳内部各处放置的点电荷的电场力的合力都为零. 由此可知，完整大球壳的左右两部分球冠对其中小半球壳作用力大小相等，方向相反，如图 7 所示.

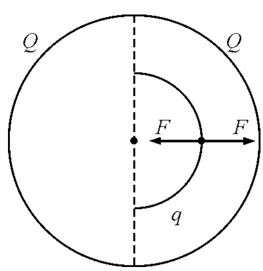

图 7　右侧补加半球壳

这表明，对于两个半径不同的半球壳，在二者的球心重合、端面重合的条件下，之间的相互作用力的大小与二者放置的方向无关. 即如图 6 所示的两个球冠反向放置时二者之间的静电力，与如图 7 所示的虚线右面两个球冠同向放置时二者之间的静电力，是大小相等的.

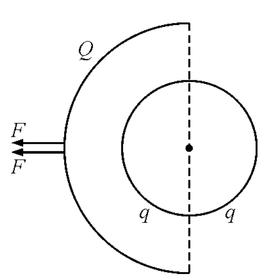

图 8　设小半球壳补加成完整小球壳，对大半球的作用力

现设想对小半球壳补加半径为 r，带电荷量为 q 的半球壳，如图 8 所示. 可知两个带电都为 q 的球冠对带电为 Q 的大球冠的作用力的大小相等，方向相同，都为 F，因此带电荷量为 $2q$，半径为 r 的完整球壳对大半球壳的作用力为 $2F$.

完整带电小球壳产生的电场可视为在球心的点电荷产生的电场，则由点电荷场强公式可知完整小球壳在大半球壳处的场强大小为

$$E = k\frac{2q}{R^2}$$

方向沿法线方向向外. 而大半球壳所受静电力压强为 $p = E\sigma$，式中电荷面密度为

$$\sigma = \frac{Q}{2\pi R^2}$$

对于内部抽成真空的半径为 R 的马德堡半球，若大气压强为 p_0，则将两个半球拉开所需的力 F 为

$$F = p_0 \pi R^2$$

同理，对于大半球壳表面各处受到沿半径方向的电场力，其合力的大小等于

$$F' = \pi R^2 p$$

即

$$2F = \pi R^2 p$$

所以两个大小不同的半球壳之间的相互作用力为

$$F = k\frac{qQ}{2R^2}$$

与小球壳的半径无关.

总之，在涉及场强计算时，都需利用完整球壳产生的场强，但要注意表面均匀带电的完整球壳在其内外以及表面内的场强大小是不同的：对于半径为 R、带电荷量为 Q 的完整球壳，在球壳之内的场强为零；在球壳之外到球心距离为 r 处的场强为

$$E = k\frac{Q}{r^2}$$

在球壳表面层内的场强为

$$E = k\frac{Q}{2R^2}$$

在球壳外表面上或非常靠近外表面处的场强为

$$E = k\frac{Q}{R^2}$$

在上述解题过程中，利用了补偿法、叠加法、类比法、等效法、矢量分解法以及对称性等.

参 考 文 献

1　姜树青. 等效思想在解竞赛类物理题中的运用. 物理教学，2005(9)：23

2　范小辉. 物理学中的叠加原理及其应用. 物理教学，2011(9)：10

3　第八届全国三年制高中理科试验班招生统一考试物理试题及解答. 物理教学，2003(6)：25