竞赛与物理专题研修

三体问题一类特解的研究

姜付锦

（武汉市黄陂一中　湖北 武汉　430300）

（收稿日期：2016－04－08）

摘　要：采用等效质量的方法对三体问题中 3 个天体始终构成一个正三角形的特解进行研究，得到了其运动的轨迹方程和运动周期的解析解.

关键词：三体问题　等效质量　解析解

宇宙中由 3 个天体构成的系统，忽略其他天体对它们的作用时存在一种运动形式：3 个天体在相互之间的万有引力的作用下，分别位于等边三角形的 3 个顶点上，绕其一共同圆心在三角形所在平面内做曲线运动. 本文先研究了 3 个天体做匀速圆周运动的规律，后研究一般轨道上的运动规律.

1　三体做匀速圆周运动

如图 1 所示，A，B，C 3 个天体的质量分别为 m_1，m_2，m_3，始终构成一个边长为 a 的正三角形，绕其共同圆心 O' 做匀速圆周运动，图中 $A\left(-\frac{a}{2},0\right)$，$B\left(\frac{a}{2},0\right)$，$C\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$.

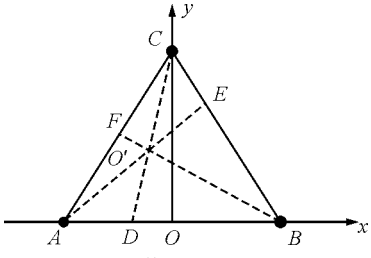


图 1　三体做匀速圆周运动

A，B 星系统的质心为 D 在 x 轴上坐标为

$$x_D=-\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\frac{a}{2}$$

$$CD=\sqrt{x_D^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2}=\frac{a}{m_1+m_2}\sqrt{m_1^2+m_2^2+m_1m_2}$$

设 A，B，C 3 天体的质心为 O'，则 O' 在 CD 的连线上，C 天体做匀速圆周的半径为

$$r_C=CO'=\frac{m_1+m_2}{m_1+m_2+m_3}\cdot CD=\frac{a\sqrt{m_1^2+m_2^2+m_1m_2}}{m_1+m_2+m_3}$$

式中 a 为正三角形的边长，$\frac{\sqrt{m_1^2+m_2^2+m_1m_2}}{m_1+m_2+m_3}$ 是一个与边长无关的因子，这个因子与等效质量有关.

同理可求得天体 A 和 B 的轨道半径分别为

$$r_A=AO'=\frac{m_2+m_3}{m_1+m_2+m_3}\cdot AE=\frac{a\sqrt{m_2^2+m_3^2+m_3m_2}}{m_1+m_2+m_3}$$

$$r_B=BO'=\frac{m_1+m_3}{m_1+m_2+m_3}\cdot BF=\frac{a\sqrt{m_1^2+m_3^2+m_3m_1}}{m_1+m_2+m_3}$$

C 做匀速圆周运动过程中受到的万有引力的合力为

$$F=\sqrt{\left(G\frac{m_3m_1}{a^2}+G\frac{m_3m_2}{a^2}\cos 60^\circ\right)^2+\left(G\frac{m_3m_2}{a^2}\sin 60^\circ\right)^2}=m_3\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2r_C$$

代入 r_C 后可求得

$$T=2\pi\sqrt{\frac{a^3}{G(m_1+m_2+m_3)}}$$

三体若始终构成一个边长不变的正三角形，则系统的周期与边长和三体的总质量有关.

2　三体的一般轨道

若用等效质心法，则 3 个天体一定组成一个正

三角形，质心位置不变.

如图 2 所示，当 C 做匀速圆周运动时受到的万有引力的合力等效为一个质量为 m'_C 的天体在圆心所施加，即[1]

$$G\frac{m_3 m'_C}{r_C^2}=m_3\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r_C$$

代入 F 和 r_C 可求得

$$m'_C=\frac{(m_1^2+m_2^2+m_1m_2)^{\frac{3}{2}}}{(m_1+m_2+m_3)^2}$$

同理得

$$m'_A=\frac{(m_2^2+m_3^2+m_2m_3)^{\frac{3}{2}}}{(m_1+m_2+m_3)^2}$$

$$m'_B=\frac{(m_1^2+m_3^2+m_1m_3)^{\frac{3}{2}}}{(m_1+m_2+m_3)^2}$$

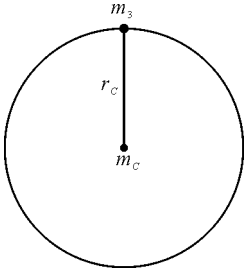


图 2　三体等效质量的计算

在图 3 中，令中心天体的等效质量为 M，某一个天体的质量为 m，则星体与中心天体的作用力可写为

$$F=-G\frac{Mm}{r^2}=-k^2\frac{m}{r^2}=-mk^2u^2$$

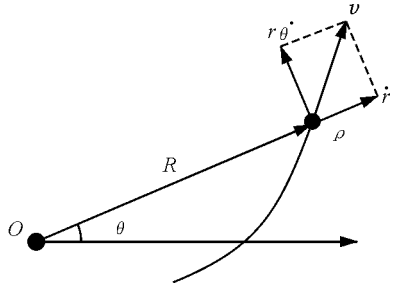


图 3　三体的一般轨道

由比耐公式[2]

$$h^2u^2\left(\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}+u\right)=-\frac{F}{m}$$

代入后得

$$h^2u^2\left(\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}+u\right)=k^2u^2$$

即

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}+u=\frac{k^2}{h^2}$$

设 $u=\xi+\frac{k^2}{h^2}$，则

$$\frac{\mathrm{d}^2\xi}{\mathrm{d}\theta^2}+\xi=0$$

这个微分方程形式与谐振动方程完全一样，它的解为

$$\xi=A\cos(\theta-\theta_0)$$

而

$$u=\xi+\frac{k^2}{h^2}=A\cos(\theta-\theta_0)+\frac{k^2}{h^2}$$

即

$$r=\frac{1}{u}=\frac{\frac{h^2}{k^2}}{1+A\frac{h^2}{k^2}\cos(\theta-\theta_0)}$$

三体问题中的某一个天体的轨道方程可写为

$$\rho=\frac{p}{1+e\cos(\theta-\theta_0)}$$

式中

$$e=\sqrt{1+\frac{2E}{m}\left(\frac{h}{k^2}\right)^2}$$

$$E=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)-\frac{k^2m}{r}$$

$$p=\frac{h^2}{k^2}\qquad k^2=GM$$

其中 θ_0 与初始位置有关.

当 $E<0$ 时，则 $e<1$ 轨道为椭圆；

当 $E>0$ 时，则 $e>1$ 轨道为双曲线；

当 $E=0$ 时，则 $e=1$ 轨道为抛物线.

说明：

(1) 要保证 3 个天体始终组成一个正三角形，则 3 个天体运动轨迹的离心率应相等.

(2) 若开始时 3 个天体做匀速圆周运动，则当它们的速度突然变为原来的 n 倍(或角动量变为原来的 n 倍) 则轨迹的离心率为 $\sqrt{1+n^2(n^2-2)}$.

3　三体问题的周期

设 A 是矢径扫过的面积，由开普勒第二定律，知单位时间内矢径扫过的面积相等，即

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=\text{常数}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}$$

或

$$2\dot{A}=r^2\dot{\theta}=h$$

将上式两边积分后得

$$2A=h(T-t_0)$$

当矢径扫过全部椭圆后，$A=\pi ab$，而所需的时间就是周期 T，$2\pi ab=hT$，整理后得

$$T=\frac{2\pi ab}{h}\qquad \frac{T^2}{a^3}=\frac{4\pi^2b^2}{h^2a}=\frac{4\pi^2p}{h^2}$$

即 $$T=\frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}\sqrt{p}}{h}$$

三体在运动过程中周期是相同的，根据开普勒第三定律$\frac{a^3}{r^3}$为一个相同的定值，式中 r 是三体做匀速圆周运动时半径，a 为椭圆的半长轴. 由于

$$a=\frac{p}{1-e^2}\qquad e=\sqrt{1+\frac{2E}{m}\left(\frac{h}{k^2}\right)^2}$$

整理为 $$a=-\frac{GMm}{2E}$$

式中 M 为等效中心天体的质量，m 为三体中某一个天体的质量，E 为某一个天体的能量，即$\left(-\frac{GMm}{2Er}\right)^3$不变. 设三体做匀速圆周运动时能量为

$$E_0=-G\frac{Mm}{2r}$$

实际运动中能量为 NE_0，即

$$E=-\frac{GMm}{2r}N$$

则三体的运动轨道种类与 N 有关，由公式可知离心率为

$$e=\sqrt{1-N(2-N)}$$

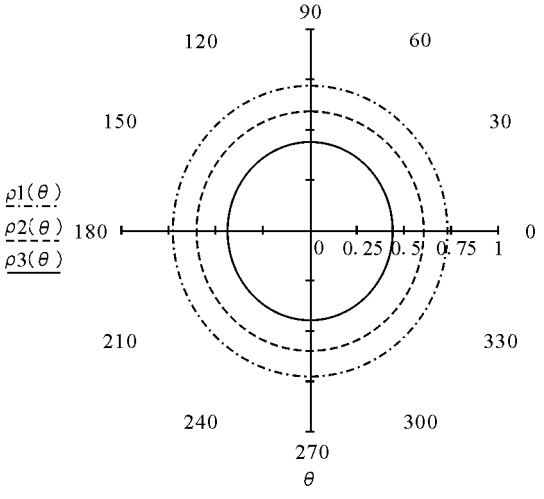
当 $N>0$ 时，则 $e<1$ 轨道为椭圆；

当 $N<0$ 时，则 $e>1$ 轨道为双曲线；

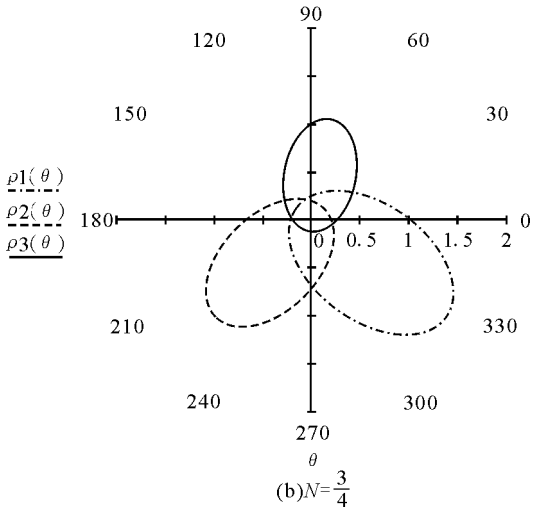
当 $N=0$ 时，则 $e=1$ 轨道为抛物线.

4　数值模拟

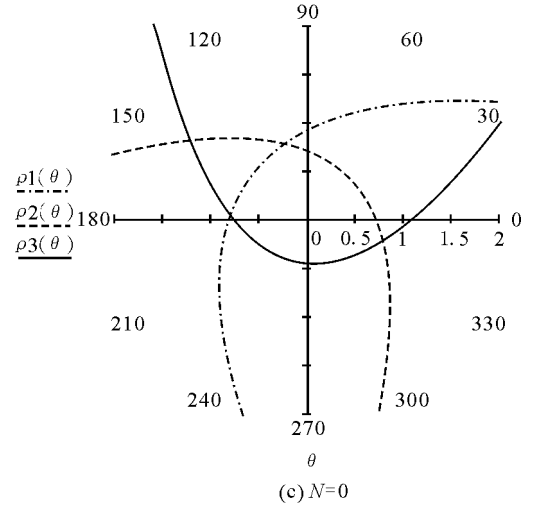
为了研究问题的方便，令 $G=1$，$m_1=1$，$m_2=2$，$m_3=3$，数值模拟如图 4 所示.



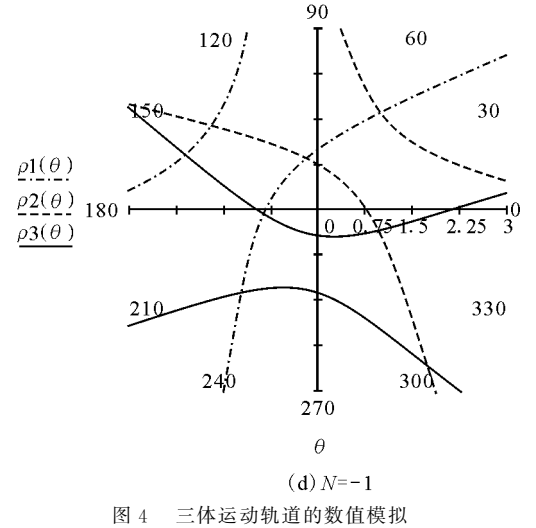
(a) $N=1$



(b) $N=\frac{3}{4}$



(c) $N=0$



(d) $N=-1$

图 4　三体运动轨道的数值模拟

5　结束语

通过对三体问题此类特解的分析可以发现，三体的运动轨道和周期与它们初始状态有关，比如能

解题思路与技巧

物理源问题的“变式”构造与例析

张建奋

（广州市白云区教育发展中心　广东 广州　510440）

（收稿日期：2016－05－26）

摘　要：通过源问题加以变化构造变式题，可从原型题的结构进行分析，主要的构造方法有以下5种.（1）通过变换背景构造变式题；（2）通过逆向思考构造变式题；（3）通过类比构造变式题；（4）通过物理模型推广构造变式题；（5）通过概念或过程“属性”变化构造变式题.

关键词：问题变式　物理　构造　模型　否定假设法

变式教学是物理教学的热点问题，也是中学教师自觉或不自觉运用的常用方法.将源问题加以变化，称为问题变式.变式题的构造可通过对某一源问题进行条件变换、结论探索、逆向思考、图形变化、类比、推广等多角度、多方位的思考，使一道题变为一类题，达到举一反三的效果.教师进行变式教学，可根据不同的教学目标、教学任务和不同的生源状况构造出相应的变式题，教学实践中编拟变式题的方法很多，但常见的有如下几种.

1　通过变换背景构造变式题

1.1　给物理命题配置实际背景

【例1】一质点在某高度以10 m/s的速度匀速竖直上抛，经17 s后到达地面.求抛出时物体离地的高度.

变式：气球以10 m/s的速度匀速竖直上升，从气球上掉下一个物体，经17 s到达地面.求物体刚脱离气球时气球的高度.（$g=10\ \mathrm{m/s^2}$）

事实上，这一实际情景所反映的物理问题的本身就是源问题.

1.2　实际背景的配置转换

【例2】小船横渡一条宽100 m的河流，船在静水中的速度5 m/s，水流速3 m/s，要使渡河时间最短，船的实际位移是多少？

变式：民族运动会上有一个骑射项目，运动员骑在奔驶的马背上，弯弓放箭射击侧向的固定目标，如图1所示.假设运动员骑马奔驰的速度为v_1，运动员静止时射出的弓箭速度为v_2.跑道离固定目标的最近距离为d.假定运动员射箭时所用力量都相同，要想命中目标且射出的箭在空中飞行时间最短，弓箭运动员放箭处离目标的距离是多少？（本题忽略竖直方向运动的影响.）

图1　骑射项目

量和角动量，它们的轨道可能是圆，也可能是椭圆，还可能是抛物线，或者是双曲线的一支，但任意时刻3个天体始终构成一个正三角形.

参 考 文 献

1　姜付锦.三体问题一类特解的初探.物理通报，2015(2)：43～45

2　周衍柏.理论力学教程(第2版).北京：高等教育出版社，1985.67～77