用数学方法点亮物理思维

徐飞翔

（灵璧县第一中学　安徽 宿州　234200）

（收稿日期：2016-04-06）

摘　要：在具体的物理问题中，注重启发学生的数学思维，发展学生数学与物理相结合的能力. 根据物理场景，灵活运用归纳法、曲线方程、三角函数等数学知识，提炼出数学模型，构建数学方程. 运用数学知识解决物理问题，促进学科融合，发展学生智力，渗透 STEM 教育.

关键词：数学方法　物理思维　归纳法　曲线方程　STEM 教育

在自然科学发展的过程中，物理和数学紧密联系相互渗透. 物理教学中要培养学生灵活运用数学知识解决物理问题的能力. 在物理习题教学中，要注意渗透数学思维方法. 数学方法与物理场景结合，能够激发学生的思维能力，培养学生严谨的逻辑思维习惯.

1　理论依据

在《普通高中物理课程标准》中规定课程具体目标时强调：通过物理概念和规律的学习过程，了解物理学的研究方法，认识物理实验、物理模型和数学工具在物理学发展过程中的作用[1]. 这里明确提出物理模型与数学知识相结合的思维训练. 在物理高考考试说明中规定：(1) 能够根据具体问题列出物理量之间的关系式，进行推导和求解，并根据结果得出物理结论；(2) 能运用几何图形、函数图像进行表达、分析[2]. 在近年兴起的 STEM（科学、技术、工程、数学）教育中[3]，也强调了数学与物理工程科学的融合对学生未来发展的重要作用.

2　应用举例

【例 1】 一般指针式钟表中的时针、分针与秒针都可视为匀速转动，分针与秒针从第一次重合至第二次重合，中间经历的时间为（　　）

A. 1 min　　B. $\frac{59}{60}$ min

C. $\frac{60}{59}$ min　　D. $\frac{61}{60}$ min

解析：本题是一道经典的圆周运动的追及问题. 常规思路是秒针再次和分针重合，必定秒针比分针多转了一周即 2π 弧度，设秒针的角速度为 ω_1，分针的角速度为 ω_2，则

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{1}\ \mathrm{min}^{-1}$$

$$\omega_2 = \frac{2\pi}{60}\ \mathrm{min}^{-1}$$

$$(\omega_1 - \omega_2)\,t = 2\pi$$

则得 $t = \frac{60}{59}$ min. 故答案为：C.

本题可以运用数学的方法重新解答. 我们先来进行逻辑推理，分针转一周要 60 min，即分针在 1 min 内转过 $\frac{1}{60}$ 周. 秒针转一周需要时间 1 min. 也就是说从重合处出发再经过 1 min 秒针回到原位置，而分针已经从原位置前进了 $\frac{1}{60}$ 周，秒针再用 $\frac{1}{60}$ min 前进 $\frac{1}{60}$ 周，而分针又前进了 $\frac{1}{60^2}$ 周，秒针再用 $\frac{1}{60^2}$ min 前进 $\frac{1}{60^2}$ 周，依次递推，当分针前进 $\frac{1}{60^n}$ 周时，秒针再往前追 $\frac{1}{60^n}$ 周用时间 $\frac{1}{60^n}$ min，直到重合为止. 由此可知，秒针追上分针所用的总时间为

$$t = 1 + \frac{1}{60} + \frac{1}{60^2} + \frac{1}{60^3} + \cdots + \frac{1}{60^n}\ (单位：\mathrm{min})$$

这里 $n \to \infty$. 此式中第 1 项到第 n 项构成一个等比数列，联系等比数列求和的通项公式

作者简介：徐飞翔（1975－　），男，本科，中教一级，主要从事中学物理教学与研究.

$$S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$$

这里 $a_1=1$，公比 $q=\frac{1}{60}$，即得

$$t = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$$

代入数据

$$t = 1 \times \frac{1-\frac{1}{60^n}}{1-\frac{1}{60}} \text{ min}$$

当 n 趋近于无穷大时，得 $t=\frac{60}{59}$ min.

此题运用逻辑推理的方法，归纳出两针再次相遇时间的表达式，灵活运用数学知识，分析解决物理问题，培养了学生的思辨能力.

【例 2】 如图 1，一质点以速度 v 从倾角为 θ 的斜面底端斜向上抛出，速度 v 的水平分量为 v_0，落到斜面上的 M 点且速度水平向右. 现将该质点以 $2v$ 的速度从斜面底端朝相同方向抛出，落在斜面上的 N 点. 下列说法正确的是(　　)

A. 从出发点到 M 点和从出发点到 N 点所用的时间之比为 1∶2

B. 落到 M 和 N 两点时速度之比为 1∶1

C. M 和 N 两点的高度之比为 1∶2

D. 落到 N 点时速度方向水平向右

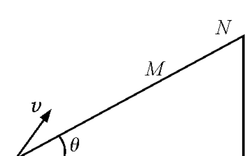

图 1　质点从斜面底端斜向上抛

解析：由于落到斜面上 M 点时速度水平向右，故可把质点在空中的运动逆向看成从 M 点向左的平抛运动. 如图 2 所示，从斜面上的 M 点以初速度 v_0 平抛一物体，以 M 点为坐标原点建立平面直角坐标系，不计空气阻力，经时间 t，物体落在斜面上时其速度为 v，水平位移和竖直位移分别为 x，y.

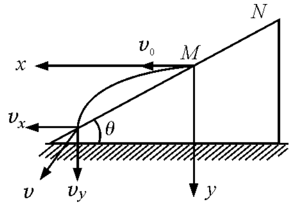

图 2　质点从斜面上 M 点水平抛出

可得

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\frac{1}{2}gt^2}{v_0 t} = \frac{gt}{2v_0} = \frac{v_y}{2v_0} \tag{1}$$

则有

$$\tan\theta = \frac{v_y}{2v_0} \tag{2}$$

对落点处分解速度如图 3 所示.

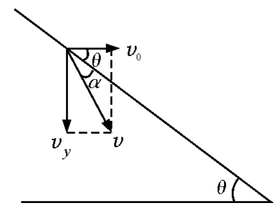

图 3　在落点处分解速度

则有

$$\tan(\alpha+\theta) = \frac{v_y}{v_0} = 2\tan\theta \tag{3}$$

$$\alpha = \arctan(2\tan\theta) - \theta \tag{4}$$

可见，从斜面上任意位置水平抛出物体落到斜面上时速度方向与斜面的夹角都相同，角度为 α. 反之，逆向思维，若从斜面底端与斜面夹角为 α，斜向上抛出物体落到斜面上时达到最高处，速度方向刚好水平. 依本题意，若物体以 $2v$ 的速度从斜面底端朝相同方向抛出，则落到 N 点时速度方向水平向右，可知 D 正确. 又根据

$$\tan\theta = \frac{v_y}{2v_0}$$

又由

$$v_y = gt \tag{5}$$

得出

$$t = \frac{2v_0\tan\theta}{g} \tag{6}$$

又由落点的速度公式

$$v = \sqrt{v_0^2 + v_y^2} = v_0\sqrt{1 + 4\tan^2\theta} \tag{7}$$

由以上两式可知，若上抛速度 v 提高到原来的 2 倍，夹角不变，到最高点速度仍然水平，但速度也是上次的 2 倍，即 $2v_0$ 为到 N 点的水平速度，时间为原来的 2 倍. 又根据竖直方向 $h=\frac{1}{2}gt^2$ 知道，高度应为原来的 4 倍，故选项 A，D 正确.

小结：本题的一个重要思路是斜上抛运动的逆向思维. 斜上抛运动到最高点的过程逆看为平抛运动. 那么，换一种思维方式，对上图 1 用斜上抛运动

结合数学知识再来分析这一题会怎样呢?

如图 4 所示,假设物体斜上抛的速度与水平方向的夹角为 β 且 $\beta=\alpha+\theta$. 由斜上抛运动分解为水平方向的匀速直线运动和竖直方向的竖直上抛运动,取水平、竖直方向为 x 轴、y 轴,t 时刻物体的坐标为

$$x=v_0 t\cos\beta \qquad y=v_0 t\sin\beta-\frac{1}{2}gt^2$$ [4]

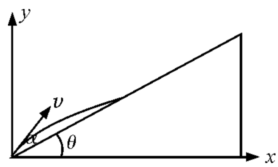

图 4　对斜上抛物体进行分析

由以上两式联立消去参数 t,可得到斜抛物体运动的轨迹方程

$$y=x\tan\beta-\frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\beta}$$

由抛物线方程得到顶点的坐标为

$$x=\frac{v_0^2}{2g}\sin(2\beta) \qquad y=\frac{v_0^2}{2g}\sin^2\beta$$

两式相除可得

$$\frac{y}{x}=\frac{\sin^2\beta}{\sin(2\beta)}=\frac{1}{2}\tan\beta$$

所以有

$$y=\frac{1}{2}x\tan\beta$$

上式表明沿同一方向抛出的各个物体所到达的最高点,在一条斜率为 $\frac{1}{2}\tan\beta$ 的倾斜的直线上. 又由题意 $\beta=\alpha+\theta$,由前面例 2 中的式(3) 得

$$\tan(\alpha+\theta)=\tan\beta=2\tan\theta$$

则由 $\frac{1}{2}x\tan\beta$ 变为 $y=x\tan\theta$,即各抛物线的顶点在斜率为 $k=\tan\theta$ 的这条倾斜直线上. 如图 4 根据斜面所在的直线方程也为 $y=x\tan\theta$,则两条直线重合. 只要斜上抛速度方向与斜面的夹角为 $\alpha=\beta-\theta$,无论速度多大,抛物线的顶点都在斜面上,即斜抛运动最高点都在这条直线上. 这样,通过构建抛物线方程与直线方程,应用数学知识解决了此类问题.

在教学中结合具体物理问题,灵活运用数学方法,注重渗透“STEM”教育,对理科学生的思维能力发展是大有帮助的.

参 考 文 献

1　中华人民共和国教育部. 普通高中物理课程标准. 北京:人民教育出版社,2004

2　中华人民共和国教育部. 2016 年高考考试说明 —— 理科综合. 北京:人民教育出版社,2015

3　朱学彦,孔寒冰. 科技人力资源开发探究 —— 美国 STEM 学科集成战略解读. 高等工程教育研究,2008(2)

4　杨榕楠. 更高更妙的物理. 杭州:浙江大学出版社,2013. 42

(上接第 32 页)

(3) 有一节标示不清的电池,希望准确知道电池的电动势和内阻,可以采用哪种办法?(图像表示)

学生:讨论交流.(略)

从问题解决的教学内涵和教学观出发,问题成为构建学习的载体. 当一个人面对问题时,就会形成一个“问题空间”,它所引发的“空缺感”是问题解决的内在动力. 学生在面对一个物理问题情境时,他们不是“一张白纸”,他们有着丰富的并存在相互差异的经验世界. 教学中,教师要把知识学习的中心从学习内容转移到学生,根据学生已有经验,设置问题,引导学生识别和分析问题,鼓励学生建立新的理解;也就是说要为学生提供一个合适的情境,即问题情境;搭起一个思考的平台,即“问题解决”的平台. 物理语言表征问题的教学正是基于这一观点,要求教师通过创设不同的问题情境为学生搭建一个思考的平台,合理组织教学内容,选择适当的物理语言表征问题基本形式(文字叙述、数学公式表达、图形图像表示),调整教学策略,协助学生进行信息分析、概括、评价、反思等一系列问题解决过程,在解决问题中建构知识,培养学生物理语言表征问题能力.

参 考 文 献

1　廖伯琴. 中学生物理问题解决的表征差异及其成因探析. 成都:四川教育出版社,2001

2　邓铸. 问题解决中对问题的外部表征和内部表征. 心理学动态,2001,9(3):193 ~ 200

3　邓铸. 知识丰富领域问题表征与解决策略. 宁波大学学报(教育科学版),2002,24(1):32 ~ 36