竞赛与
物理专题研修

变换参考系统一两种多普勒效应

宋辉武

（鄂尔多斯市第一中学 内蒙古 鄂尔多斯 017010）

（收稿日期：2016－07－13）

摘 要：机械波多普勒效应在高中基础物理中只要求定性掌握，但是在自主招生及竞赛中却必须要掌握其定量表达式并能熟练运用，在大学普通物理学中更是要求掌握电磁波多普勒效应．尝试另辟蹊径，创新地通过变换参考系的方式结合相对论效应简单形象地得出多普勒效应的一般表达式，并据此揭秘多普勒效应中蕴含的种种玄机．

关键词：机械波 电磁波 多普勒效应 横向 纵向

众所周知，我们一般习惯于将多普勒效应独立地分为机械波多普勒效应和电磁波多普勒效应，并且认为二者之间只有区别没有联系，譬如电磁波多普勒效应只跟波源和观察者之间的相对速度有关，且电磁波具有横向多普勒效应，而机械波并不具备这些特点．对于电磁波多普勒效应，文献[1]给出了复杂的证明，而且证明的条件是波源静止观察者运动，笔者认为首先其证明过程并不具有一般性，其次，该文作者简单地认为电磁波多普勒效应和机械波多普勒效应的定量表达式是截然不同的，难道没有什么简单易懂的方式可以得出电磁波多普勒效应的频移公式吗?机械波多普勒效应和电磁波多普勒效应难道真的只有区别没有联系吗?这就是本文要详细探讨的问题．

在得出机械波多普勒效应频移公式时，我们往往习惯以介质系为参考系，频移公式中的速度即指介质系中的速度．而实际上，在多普勒效应的问题中，我们对参考系选择的余地很大，除了可以选择介质系，还可以选择波源系以及观察者系．笔者最近通过详细计算发现，分别以介质系、波源系、观察者系为参考系时得出的结论是一致的．而在以观察者系为参考系进行计算时收到了意想不到的效果，令笔者真正体会到了物理学中的简洁美与对称美．本文主要通过计算形象具体地向读者解释4个典型的疑问：

（1）如何简单、有效地推导出电磁波多普勒效应频移公式？

（2）为何电磁波多普勒效应只与波源和观察者之间的相对速度有关？

（3）什么是横向、纵向多普勒效应？

（4）电磁波多普勒效应和机械波多普勒效应有何潜在联系？

下面为了方便我们暂时只讨论波源和观察者的速度在一条直线上的情形．

设波相对介质的速度为 v，方向向右，波源相对介质的速度为 v_{s}，方向向右，观察者相对介质的速度为 v_{r}，方向向右，该波的固有频率为 f_0，固有周期为 T_0．下面我们一反常态创新地以观察者系为参考系，此时在得出观察者接收的频率时，为了方便理解，可以利用等效的思想，这样一来便不难得到观察者接收到的频率

$$f' = \frac{u_{有效}}{\lambda_{有效}} \tag{1}$$

其中 $u_{有效}$ 为有效速度，$\lambda_{有效}$ 为有效波长（也可以叫做表观波长），对式(1)进行变形并结合相对论中的洛伦兹速度变换关系，取向右为正方向，则有

$$f' = \frac{u_{有效}}{\lambda_{有效}} = \frac{v_{\mathrm{wr}}}{(v_{\mathrm{wr}} - v_{\mathrm{sr}})T_{\mathrm{wr}}} \tag{2}$$

其中

$$v_{\mathrm{wr}} = \frac{v - v_{\mathrm{r}}}{1 - \dfrac{v v_{\mathrm{r}}}{c^2}}$$

作者简介：宋辉武（1989－ ），男，硕士，中教一级，主要从事中学物理教学及研究．

为波相对观察者的速度.由于 $v > v_r$，因此 v_{wr} 方向向右，符号恒为“+”.v_{sr} 为波源相对观察者的速度，有

$$v_{sr} = \frac{v_s - v_r}{1 - \frac{v_s v_r}{c^2}}$$

当 $v_s > v_r$ 时，v_{sr} 方向向右，符号为“+”，当 $v_s < v_r$ 时，v_{sr} 方向向左，符号为“-”.式(2) 中

$$T_{wr} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{v_{sr}^2}{c^2}}}$$

其中 T_{wr} 为观察者系中波的周期.可以看出式(2) 中的各个物理量皆为观察者系中的量.$v_{wr}T_{wr}$ 为观察者系中的“正常波长”，$v_{sr}T_{wr}$ 为需要“补偿的波长”，二者之差 $(v_{wr}T_{wr} - v_{sr}T_{wr})$ 即为观察者系中的表观波长.需要注意的是，v_{wr} 与 v_{sr} 的方向可能相同也可能相反，而实际上二者方向相同表现为表观波长等于“正常波长”减去一个“补偿波长”，二者方向相反表现为表观波长等于“正常波长”加上一个“补偿波长”.由此可以看出式(2) 即为

$$f' = \frac{\dfrac{v - v_r}{1 - \frac{v v_r}{c^2}}}{\left(\dfrac{v - v_r}{1 - \frac{v v_r}{c^2}} - \dfrac{v_s - v_r}{1 - \frac{v_s v_r}{c^2}}\right)\dfrac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{v_{sr}^2}{c^2}}}} \tag{3}$$

式(3) 即为多普勒效应的一般表达式，任何波的多普勒效应都可以用此公式进行计算.需要注意的是，上式表达的是一个矢量关系.下面我们具体来看一下以观察者系为参考系带来的方便(下面讨论时取 v, v_s, v_r 皆大于零).

情况 1：

如图 1 所示，规定向右(v 的方向) 为正方向，则式(3) 变为

$$f' = \frac{\dfrac{v + v_r}{1 + \frac{v v_r}{c^2}}}{\left(\dfrac{v + v_r}{1 + \frac{v v_r}{c^2}} - \dfrac{v_s + v_r}{1 + \frac{v_s v_r}{c^2}}\right)\dfrac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{v_{sr}^2}{c^2}}}} \tag{4}$$

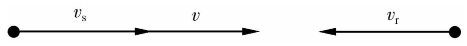

图 1　情况 1 示意图

情况 2：

如图 2 所示，规定向右(v 的方向) 为正方向，则式(3) 变为

$$f' = \frac{\dfrac{v + v_r}{1 + \frac{v v_r}{c^2}}}{\left(\dfrac{v + v_r}{1 + \frac{v v_r}{c^2}} - \dfrac{-v_s + v_r}{1 - \frac{v_s v_r}{c^2}}\right)\dfrac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{v_{sr}^2}{c^2}}}} \tag{5}$$

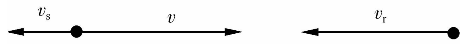

图 2　情况 2 示意图

情况 3：

如图 3 所示，规定向右(v 的方向) 为正方向，则式(3) 变为

$$f' = \frac{\dfrac{v - v_r}{1 - \frac{v v_r}{c^2}}}{\left(\dfrac{v - v_r}{1 - \frac{v v_r}{c^2}} - \dfrac{-v_s - v_r}{1 + \frac{v_s v_r}{c^2}}\right)\dfrac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{v_{sr}^2}{c^2}}}} \tag{6}$$

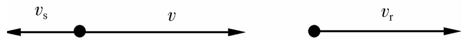

图 3　情况 3 示意图

情况 4：

如图 4 所示，规定向右(v 的方向) 为正方向，则式(3) 变为

$$f' = \frac{\dfrac{v - v_r}{1 - \frac{v v_r}{c^2}}}{\left(\dfrac{v - v_r}{1 - \frac{v v_r}{c^2}} - \dfrac{v_s - v_r}{1 - \frac{v_s v_r}{c^2}}\right)\dfrac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{v_{sr}^2}{c^2}}}} \tag{7}$$

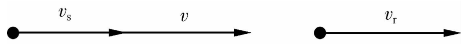

图 4　情况 4 示意图

分情况讨论：

(1) 机械波多普勒效应

不难看出对于一般的机械波而言，由于波源以及观察者相对于介质的速度都远小于真空中的光速 c，因此可知式(4) ～ (7) 中的

$$\frac{v + v_r}{1 + \frac{v v_r}{c^2}} \approx v + v_r$$

$$\frac{v - v_r}{1 - \frac{v v_r}{c^2}} \approx v - v_r$$

$$\frac{v_s + v_r}{1 + \frac{v_s v_r}{c^2}} \approx v_s + v_r$$

$$\frac{v_s - v_r}{1 - \frac{v_s v_r}{c^2}} \approx v_s - v_r$$

$$\frac{-v_s + v_r}{1 - \frac{v_s v_r}{c^2}} \approx -v_s + v_r$$

$$\frac{-v_s - v_r}{1 + \frac{v_s v_r}{c^2}} \approx -v_s - v_r$$

$$\frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{v_{sr}^2}{c^2}}} \approx T_0$$

因此式(4)～(7)可分别回归到

$$f' = \frac{v + v_r}{v - v_s} f_0$$

$$f' = \frac{v + v_r}{v + v_s} f_0$$

$$f' = \frac{v - v_r}{v + v_s} f_0$$

$$f' = \frac{v - v_r}{v - v_s} f_0$$

这便是在教学中常见的机械波多普勒效应的频移公式，一般我们习惯将这 4 种情况合并成一个表达式

$$f' = \frac{v \pm v_r}{v \mp v_s} f_0$$

可以看出机械波的多普勒效应属于一般多普勒效应在低速情况下的经典近似.

(2) 电磁波多普勒效应

根据上述表达式可以很容易地推出电磁波多普勒效应的频移公式.此时有 $v = c$，式(3)中的

$$\frac{v - v_r}{1 - \frac{v v_r}{c^2}} = c$$

因此式(3)回归到

$$f' = \frac{c}{(c - v_{sr})\dfrac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{v_{sr}^2}{c^2}}}} = \sqrt{\frac{c + v_{sr}}{c - v_{sr}}} f_0$$

这个公式也是大家非常熟悉的，在这里 v_{sr} 可能大于零也可能小于零，若我们设 $|v_{sr}| = v > 0$，则对于情况 1，2，3，4 来说，可以归纳合并成两种情况，一种情况是波源和观察者之间的距离逐渐减小的情形，由于 v_{sr} 方向向右，因此可以得到

$$f' = \sqrt{\frac{c + v}{c - v}} f_0$$

另一种情况是波源和观察者之间的距离逐渐增大的情形，由于 v_{sr} 方向向左，因此可以得到

$$f' = \sqrt{\frac{c - v}{c + v}} f_0$$

由此可以看出观察者接收到的真空中的电磁波的频率仅与波源和观察者之间的相对速度 v_{sr} 有关.

(3) 对于电磁波来说，考察波源相对观察者的速度与波源和观察者的连线不在同一条直线的情况

设波源相对观察者的速度 v_{sr} 与波源和观察者的连线所成的角度为 θ，则此时可将 v_{sr} 分解到波源和观察者的连线方向上，即分解为 $v_{sr}\cos\theta$，则式(3)可写为

$$f' = \frac{c}{(c - v_{sr}\cos\theta)\dfrac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{v_{sr}^2}{c^2}}}} = \frac{\sqrt{1 - \frac{v_{sr}^2}{c^2}}}{1 - \frac{v_{sr}\cos\theta}{c}} f_0$$

可以看出当 $\theta = 90°$ 时

$$f' = \sqrt{1 - \frac{v_{sr}^2}{c^2}} f_0$$

此即电磁波的横向多普勒效应，可以看出这是相对论效应中时间膨胀的必然结果.当 θ 角为零或 180° 时，即为光的纵向多普勒效应；当 θ 角为其他值时，不难理解，理论上不论是电磁波还是机械波，横向多普勒效应与纵向多普勒效应是共同存在的，只不过强弱不同而已，而机械波由于忽略时间膨胀效应，因此表观波长不会因为波源相对观察者的横向运动而发生改变，而有效速度又没有发生改变，因此才会导致其没有横向多普勒效应.

综上所述，可以看出机械波多普勒效应和电磁波多普勒效应是可以统一起来的，二者只是不同情况下的两种特例，这一切看似简洁美妙的结论只有以观察者系为参考系才能显现出来.希望本文的讨论可以澄清广大物理教师对多普勒效应的种种误解.

参考文献

1　沈瑞清.光波的多普勒效应公式是什么.中学物理教学参考，2004(5)：19