

## 对两道电磁感应试题的探讨

郑 金

(凌源市职教中心 辽宁 朝阳 122500)

(收稿日期:2016-08-01)

**摘 要:**利用瞬态过程的结论对两道有关滑杆在匀强磁场中运动的试题进行了定量分析,由此探讨题中数据的自洽性与条件的合理性,并分别给出可行的修改方法.

**关键词:**电磁感应 滑杆 电容器 瞬态过程

在编拟物理试题时,由于题中给出的数据不自洽或给出多余条件而导致试题错误,但却难以发现.下面利用瞬态过程的结论对两道有关匀强磁场中的滑杆电路试题进行分析.

**【例 1】**如图 1 所示,水平固定的两根平行金属导轨间距  $l = 1 \text{ m}$ ,之间接有电动势为  $E = 6 \text{ V}$ ,内阻  $r = 1 \Omega$  的电源.质量  $m = 1 \text{ kg}$ ,电阻  $R = 1 \Omega$  的金属棒静止在导轨上,与两导轨垂直并保持良好接触,整个装置处于磁感应强度  $B = 2 \text{ T}$  的匀强磁场中,磁场方向垂直导轨向下.已知棒与导轨间的摩擦阻力恒为  $f = 2 \text{ N}$ ,从开关 S 闭合到金属棒的速度达到稳定的过程中流过金属棒的电荷量  $q = 2 \text{ C}$ ,不计导轨电阻,试求此过程中金属棒上产生的热量.

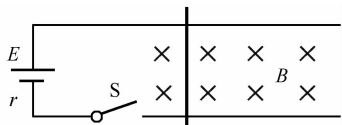


图 1 例 1 题图

**解析:**设金属棒达到的稳定速度为  $v$ ,此时电流

为  $I$ ,由受力平衡得  $BlI = f$ . 感应电动势  $\epsilon = Blv$ ,由闭合电路的欧姆定律得电流

$$I = \frac{E - \epsilon}{R + r}$$

联立方程可得稳定速度  $v = 2 \text{ m/s}$ .

电路中的瞬时电流

$$i = \frac{E - Blv}{R + r}$$

对于一段很短的时间  $\Delta t$ ,电流  $i = \frac{\Delta q}{\Delta t}$ ,棒运动速度

$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ ,联立各式可得

$$\frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{E}{R + r} - \frac{Bl}{R + r} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

写成微分形式

$$d\left(q + \frac{Bl}{R + r}x\right) = \frac{E}{R + r}dt$$

可知

$$q + \frac{Bl}{R + r}x = \frac{E}{R + r}t$$

对金属棒由动量定理有

能力.

(2) 通过对研究课题的深入分析,使得学生能够深入思考,理解了学科概念和学科规律的本质,并且将离散的知识点融汇贯通,加深了学生对学科知识体系的全面认知,也提升了理论知识的教学效果.

(3) 在论文撰写中通过组员的分工协作,初步锻炼了学生的团队协作精神,为将来进一步参加科研活动打下良好的基础.

### 参 考 文 献

- 1 张晓春,李富全,赵志洲,等. 大学物理教学现代化的研究与实践. 大学物理,1998,17(12):37 ~ 39
- 2 徐小华. 教学交融,培养素质,激发创新 —— 大学物理教学现状调查及教改探索总结报告. 东华理工学院学报(社会科学版),2007,26(1):84 ~ 87
- 3 郭守月,穆妹慧,袁兴红,等. 浅析农科大学生厌学物理的主要原因. 大学教育,2012,1(9):99 ~ 100

$$Blq - ft = mv$$

联立方程可得位移  $x = 1.0 \text{ m}$ .

由于在金属棒与电源内阻上产生的焦耳热相等, 即  $Q_R = Q_r$ , 则由能量守恒定律有

$$Eq = \frac{1}{2}mv^2 + fx + 2Q_R$$

联立以上各式得热量  $Q_R = 4 \text{ J}$ .

**探讨:** 虽然上述解答方法及过程都正确, 但由于题目本身有误, 因此结果不正确. 对于该题还有一种错误解法, 即由

$$q = N \frac{\Delta\Phi}{R_{\text{总}}} = \frac{Blx}{R+r}$$

得金属棒的位移  $x = 2 \text{ m}$ , 应用能量守恒定律列方程解得热量  $Q_R = 3 \text{ J}$ . 该解法的错误原因是结论公式  $q = N \frac{\Delta\Phi}{R_{\text{总}}}$  只适用于纯电阻电路, 对于含有电容、电感和电源的非纯电阻电路, 公式不成立. 所以在应用物理结论时, 要注意适用条件.

下面利用微积分知识分析题中数据的自洽性.

对金属棒由牛顿第二定律有

$$Bl \frac{E - \epsilon}{R'} - f = m \frac{dv}{dt}$$

将  $\epsilon = Blv$  代入可得关于瞬时速度的一阶常系数线性微分方程的标准形式

$$\frac{E}{Bl} - \frac{R'f}{B^2 l^2} = v + \frac{mR'}{B^2 l^2} \frac{dv}{dt}$$

利用瞬态过程的结论可知速度稳态值为

$$f(\infty) = \frac{E}{Bl} - \frac{R'f}{B^2 l^2}$$

时间常数为

$$\tau = \frac{mR'}{B^2 l^2}$$

速度变化的关系式为

$$v = \left( \frac{E}{Bl} - \frac{R'f}{B^2 l^2} \right) (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

所以电流的关系式为

$$i = \frac{E - Blv}{R'} = \frac{f}{Bl} + \left( \frac{E}{R'} - \frac{f}{Bl} \right) e^{-\frac{t}{\tau}}$$

进行数学积分可得

$$q = \frac{f}{Bl} t + (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \left( \frac{E}{R'} - \frac{f}{Bl} \right) \tau$$

由于  $e^{-5} \approx 0.0067 \approx 0$ , 因此可认为当  $t = 5\tau$

时, 已趋近于稳态. 时间常数  $\tau = 0.5 \text{ s}$ , 则瞬态过程经历的时间约为  $t = 5\tau = 2.5 \text{ s}$ , 所以  $q = 3.5 \text{ C}$ .

只要电荷量的数值不小于  $3.5 \text{ C}$ , 就是可行的. 由于题中的  $q = 2 \text{ C}$  小于  $3.5 \text{ C}$ , 因此是错误的.

也可重新设置题中数据. 若取  $E = 18 \text{ V}$ ,  $B = 1.0 \text{ T}$ ,  $m = 0.1 \text{ kg}$ ,  $l = 0.5 \text{ m}$ , 可知  $\tau = 0.8 \text{ s}$ , 则瞬态过程的时间  $t \approx 5\tau = 4 \text{ s}$ , 所以  $q = 20 \text{ C}$ . 其实对于题中的 8 个数据, 若任意给定 7 个, 则需对另一个数据进行推算, 而不能随意编造.

**【例 2】** 如图 2 所示, 水平放置的两个光滑平行金属导轨相距  $L$ , 足够长, 其左端接一电容为  $C$  的电容器, 在两导轨间有垂直于导轨平面竖直向下的匀强磁场, 磁感应强度为  $B$ , 一质量为  $m$  的金属杆  $ab$  垂直放置在导轨上. 现给金属杆一个水平向右的初速度  $v_0$ , 设电容  $C$  足够大, 金属杆与导轨的电阻都可忽略不计, 试求金属杆运动的最终速度.

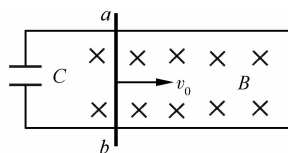


图 2 例 2 题图

**解析:** 金属杆切割磁感线产生感应电动势  $\epsilon = Blv$ , 给电容器充电, 同时受到安培力的作用而减速. 由于电路中电容器两端电势差与金属杆的感应电动势方向相反, 则当二者大小相等时, 电流为零, 电容器充电完毕, 金属杆将做匀速运动. 设此时速度大小为  $v$ , 通过金属杆横截面的总电荷量为  $q$ , 对金属杆由动量定理有

$$-BLq = mv - mv_0$$

充电完毕时  $U_C = \epsilon$ , 则电容器的电荷量为

$$Q_C = CU_C = CBLv$$

通过金属杆的电荷量与电容器的充电量相等, 即  $q = Q_C$ . 可得金属杆的最终速度

$$v = \frac{mv_0}{m + B^2 L^2 C}$$

**探讨:** 在解题过程中没有提及电路的电阻, 下面利用微积分知识探究电路的电阻是否为零.

设当金属杆做减速运动经历时间  $t$  时的瞬时速度为  $v$ , 通过金属杆横截面的总电荷量为  $q$ , 对金属

杆的减速运动过程由动量定理可知

$$q = \frac{m}{BL}v_0 - \frac{m}{BL}v$$

则回路中的电流

$$i = \frac{dq}{dt} = -\frac{m}{BL} \frac{dv}{dt}$$

设回路中的等效电阻为  $R$ , 则回路电压方程为

$$BLv - iR - \frac{q}{C} = 0$$

可得关于瞬时速度的二阶常系数线性微分方程的标准形式为

$$\frac{mv_0}{m + B^2L^2C} = v + \frac{mRC}{m + B^2L^2C} \frac{dv}{dt}$$

由此可知, 当加速度  $\frac{dv}{dt} = 0$  时, 金属杆运动的速度达到稳定值, 可得最终速度

$$v = \frac{mv_0}{m + B^2L^2C}$$

在这种解法中, 列方程时用到了电阻, 而且由时间常数  $\tau = \frac{mRC}{m + B^2L^2C}$  可知, 电路的直流电阻  $R$  越小, 充电时间就越短. 若  $R = 0$ , 则  $\tau = 0$ , 充电瞬间完成, 将不存在瞬态过程; 此外, 由于电荷在运动过程中不受阻碍作用, 就不会产生焦耳热. 因此, 题中的附加条件“杆与导轨的电阻都可忽略不计”是多余的, 或者说是错误的, 应该去掉. 因为只有在电路存在电阻的条件下, 金属杆的运动才有减速过程, 那么感应电动势与电容器两端电压不是时刻相等, 而是到最后才相等. 若电阻为零, 则电容器两端的电压由零突变到  $BLv_0$ , 其储存的能量由零突变到  $\frac{1}{2}CB^2L^2v_0^2$ , 而根据相对论原理, 能量只能以有限速度传递, 那么某一区域内储能的变化只有经过一定的时间才能完成.

所以说, 对于电容器与滑杆的组合电路, 只要滑杆有初速度, 电路的等效直流电阻就不能视为零, 那么在充电过程中电容器两端的电势差与电源电动势不相等, 而且必有电能损失即产生焦耳热, 不可忽略; 但这个能量不是电磁辐射能量, 因为在电容器充电过程中没有发生高频电磁振荡, 也不存在开放电

路, 则不产生电磁波.

反之, 若将电路的电阻视为零, 则对滑杆就不能设置初速度. 滑杆只能受到恒定动力由静止开始运动, 那么在电容器充电过程中其两端的电势差与电源电动势时刻相等, 而不是最终相等. 如 2007 年上海交通大学自主招生考试的一道物理试题、2013 年高考理科综合试题(新课标卷 I) 物理部分的压轴题都属于这种情形; 又如 1993 年第十届全国中学生物理竞赛决赛试卷中关于电容器与滑杆的组合电路问题是一道错题, 不应设金属杆初速度, 因为在该条件下, 电容器两端的电压由零突变到  $BLv_0$ , 其储存的能量发生突变, 这是不合实际的. 在解答这类题时, 都不考虑电能损失(焦耳热), 也不考虑电磁辐射(恒定电流不产生电磁波), 而且滑杆运动过程都是匀加速直线运动过程, 不是瞬态过程.

若电容器原来带电, 而滑杆在安培力作用下由静止开始运动, 则电路的有效电阻也不能视为零, 这是因为在电容器通过滑杆放电的过程中, 物理量的变化需要经历一个过程才合理; 而只有当电路的等效直流电阻不为零时, 物理量的变化过程才是瞬态过程.

上述分析讨论过程虽然是针对两道题, 但实际上是涉及到两类题, 或者说, 与两个例题相似的错题比较常见, 因此对于探讨有关的物理问题或编拟有关的试题都具有一定的参考价值和指导意义.

### 参考文献

- 1 李爱华. 浅谈推论  $q = N \frac{\Delta\Phi}{R_{\text{总}}}$  的适用范围. 中学物理教学参考, 2011(10): 9 ~ 10
- 2 郑金. 利用结论巧解“甲虫和橡胶带”问题. 物理通报, 2012(4): 61 ~ 63
- 3 彭安璐. 殊途理同. 物理教学, 2007(10): 53
- 4 黄剑. 一个理想化条件引起的命题错误. 中学物理, 2013(4): 79 ~ 80
- 5 张争光. 含容电路中能量转换问题的思维对话. 中学物理教学参考, 2013(8): 37
- 6 薄宏斌. 电磁感应现象中含容电路的处理. 物理教学, 2007(9): 38, 55