

利用高斯定理求空心球体引力场

余泽西

(北京市昌平新东方外国语学校 北京 102206)

(收稿日期:2016-08-23)

摘要:针对现阶段 AP 物理教学中引力有关定律推导问题,采取与以往建立微分式不同的方法,即利用高斯定律来求解空心引力场值:地球谐振子模型和空心球壳,为广大教师提供一个新的授课思路。

关键词:AP 教学 引力场 空心球体 高斯定律

1 引言

现阶段物理教学中,对于空心球体内部引力场值问题,教师一般采用建立微分方程的方法,然而这种方法虽建立简单,但是求解困难,因为涉及两个变量 θ 和 R 使得学生难以求解^[1]. 如果我们可以利用引力场是保守力场这一事实将其与电磁场做类比,从而使我们可以方便地求解球形引力场的场强. 在 AP 力学^[2] 的教学中,引力场求解部分主要集中在牛顿的经典力学,也就是说,引力与质量是成线性关系的. 而对于本文所讨论电磁学中,我们使用简化版描述静电场的麦克斯韦方程^[3]. 这是由于 AP 课程主要是针对于未参加大学学习即将进入美国大学的学生,他们微积分知识较为薄弱,所以在美方标准课标中,去除了难以令学生理解的散度概念和复杂的算符表达.

2 二者的相似性

在引言所提及的范围下,不难发现这两个经典理论有很多相似性. 首先,无论是电子还是质点在封闭的运动轨迹中,重力做的总功为零,也就是说,二者都属于保守立场. 其次,对于经典静电场我们有库仑定律 $F = k \frac{Qq}{r^2}$, ($k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$). 同样的,在引力场中我们有牛顿万有引力定律 $F = G \frac{Mm}{r^2}$, 这里, F 均为标量. 从公式来看,力的大小分别正比于质量的多少和电荷量. 且力的大小都与距离成平方的倒数递减. 由于满足以上阐述的条件,所以我们可以将 AP 电磁学里的简化高斯定理推广到牛顿引力场的求解中

去.

3 求地球引力系数

在 AP 物理学中,简化静电场公式为

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

这里 \mathbf{E} 是电场强度, Q 是电荷量.

通常的我们称 ϵ_0 为静电系数,但并不知道在引力场的高斯定理中质量与 G 的关系,也就是说“引力系数”. 但在确定二者的相似性后,我们可以通过联立库仑定律和万有引力公式来求解引力场中的高斯定理的质量系数.

如图 1 所示,这里我们设引力系数为 \forall . 如果说 k 和 G 对应的的话,那么 $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$, 我们就有 $G = \frac{1}{4\pi\forall}$, $\forall = \frac{1}{4\pi G}$, 同样的,类比于简化电磁高斯定理,可以得到引力高斯定理

$$\oint \mathbf{g} \cdot d\mathbf{A} = 4\pi GM \quad (1)$$

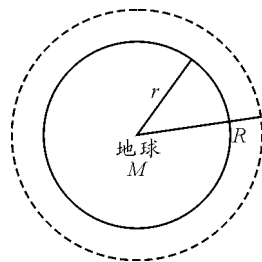


图 1 求地球引力系数附图

证:

- (1) 地球的物质分布均匀,即密度处处相等
- (2) 地球是完美实心球体
- (3) \forall 是引力场强系数, g 是引力场强,地球半

径为 r , 质量为 M , 高斯面半径为 R , 在 R 处, 则有

$$\oint \mathbf{g} \cdot d\mathbf{A} = 4\pi GM \quad (2)$$

由于是完美球体, 力场强度在 R 上处处相等

$$\mathbf{g} \cdot \oint d\mathbf{A} = 4\pi GM$$

球表面积为

$$S = 4\pi R^2 \quad (3)$$

将式(3)代入式(2)有

$$\mathbf{g} = \mathbf{G} \frac{M}{R^2} \quad (4)$$

高斯引力和万有引力公式结论一致, 证毕.

在考题中学生一般会遇到高斯面内质量随高斯面的大小改变而改变的情况, 那么此时如果简化高斯定理中的变量是质量密度, 就会显得更有效. 而且在 AP 物理中, 问题中的质量源一般是均匀的(密度在球体内处处相等), 所以

$$\oint \mathbf{g} \cdot d\mathbf{A} = 4\pi GM = 4\pi G\rho V \quad (5)$$

这里, V 是体积.

4 该方法在习题中的应用

现在针对真实出现的考题, 做举例说明.

4.1 求中空隧道的引力场值(地球谐振子模型)

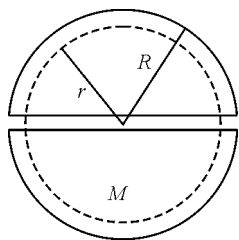


图2 地球谐振子模型

已知:

- (1) 地球质量分布均匀;
 - (2) 中间隧道十分微小;
 - (3) 地球质量为 M , 密度为 ρ ; 高斯面半径为 r .
- 求: 在 $r < R$ 时引力强度与半径 r 的关系.

解: 如图2所示, 利用球形对称, 我们利用式(5)建立式子

$$\oint \mathbf{g} \cdot d\mathbf{A} = 4\pi G\rho V$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\oint d\mathbf{A} = 4\pi r^2$$

$$\mathbf{g} \cdot 4\pi r^2 = 4\pi G\rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$$

约分整理得

$$\mathbf{g} = \frac{4\pi G\rho r}{3} \quad (6)$$

式(6)结果表明, 引力场强度和半径成线性关系(Linear relationship)可以发现除了 r 是变量之外, 其他符号表示的量均为常量. 由此我们可以得到空心隧道引力场强度变化是随着半径成线性变化的结论.

4.2 求空心球壳的引力场值

利用高斯定理, 原本复杂的空心球体计算也大大简化, 如图3所示.

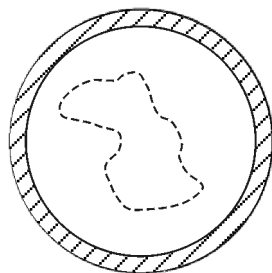


图3 空心球壳

由于在高斯面内没有质量分布, 其质量 M 为零, 式(5)可列为

$$\oint \mathbf{g} \cdot d\mathbf{A} = 4\pi G \cdot 0$$

解得

$$\mathbf{g} = 0$$

由于中心无源, 本题目的难度大大简化, 物体在空心球壳内部的引力为零.

5 总结

综上所述, 可以得到以下几个结论:

- (1) 引力系数为 $\forall = \mathbf{G} \cdot 4\pi\rho = 4\pi GM$;
- (2) 隧道模型引力场强度随半径成线性递增;
- (3) 空心球体内部引力场值处处相等.

可以发现, 由于球形对称的结构, 引力场用高斯面可以非常方便的被求解. 且相比于牛顿的质点方法, 这种对于力场的直观呈现可以使学生更好的抓住要点, 和形成明确的物理直觉. 而且由于 AP 物理考题中, 物理题大多都为本文所提及球形对称, 所以该方法可以让学生更快的得到结果.



热点进课堂 难点巧突破

——以台球运动为例

胡晓强

(平湖中学 浙江 嘉兴 314200)

(收稿日期:2016-09-21)

摘要:以学生感兴趣的热点——台球运动为例,通过在课堂上精心设计与台球运动相关的系列物理情景,引发学生深入的思考与实践,从而促进学生对于重点核心知识与技能的突破,不失为一种有效的教学尝试。

关键词:物理课堂教学 台球 热点

近年来,随着丁俊晖等一大批中国优秀斯诺克台球选手的涌现,国人对于台球运动的热情达到前所未有的高度,广大青少年也对台球运动乐此不疲。在此背景下,作为物理教师,若能将青少年学生喜爱的台球运动巧妙地与平时的物理教学相结合,将学生的兴趣点融进课堂,这样定能引发学生共鸣,从而提高课堂学习效率,收到事半功倍的良好效果。

下面以台球运动为例,破解物理课程中力学的几个难点。

1 摩擦力重点概念的突破

高中生在刚接触摩擦力时,对于“弹力”、“静摩擦力”、“最大静摩擦力”、“滑动摩擦力”、“动摩擦因数”等概念难以有一个具体感性的认识,教师不妨

参考文献

- 1 陈小红 罗琬华. 西南大学物理科学与技术学院. 物理通报, 2014(05):116 ~ 117
- 2 Parker W, Mosborg S, Bransford J, et al. Rethinking Advanced High School Coursework: Tackling the Depth/Breadth Tension in the AP "US Government and Politics" Course. Curriculum Studies, 2011, 43(4):1 ~ 27.
- 3 S. Nesseris and L. Perivolaropoulos. Department of Physics, University of Ioannina, Greece. Physical Review

D Particles & Fields, 2006, 73(10):3 511

- 4 Exner P. Analysis on graphs and its applications: Issac Newton Institute for Mathematical Sciences, Cambridge, UK, January 8 - June 29, 2007. American Mathematical Society, 2008
- 5 Gravity G L F. Gauss' Law for Gravity. Alphascript Publishing, 2010
- 6 Ragains P. Cracking the AP Physics 2 Exam, 2016 Edition. Public Finance Review, 2015, 22(3):366 ~ 382

Gauss's Law to Prove Hollow Sphere's Gravitational Field

Yu Zexi

(Beijing changing New Oriental FLS, Beijing 102206)

Abstract: considering the current AP teaching problem about gravitational field conduction, I used Gauss's Law to prove two models, harmonic oscillator earth and hollow sphere, instead of conventional differential equation. This method, I hope, can provide teachers a new way to prove for students.

Key words: AP teaching; gravitational field; hollow sphere; Gauss's Law