

导体棒转动切割磁感线问题探微

徐洪图 窦人镜

(抚顺市第一中学 辽宁抚顺 113001)

(收稿日期:2016-08-24)

摘要:在垂直于磁场的平面内,导体棒绕固定点旋转问题,在近几年的高考题中出现频率较高,其中固定点经常出现在棒的端点,或者棒所在的直线上某点,棒两端电势差的大小 $E = BL\bar{v} = BLv_{\text{中}}$,阐述了固定点不在棒所在的直线上时,棒两端电势差的大小仍然可以用类似的公式 $E_{AB} = BL\bar{v} = BLv_{\text{中}}$ 来进行表示,轻松比较棒两端电势差大小如何变化.

关键词:转动切割 电势差 平均速度 棒中点速度

1 导体棒绕沿棒所在直线上的某一点旋转

(1) 绕棒某一端点旋转

如图1所示,导体棒绕端点O旋转.

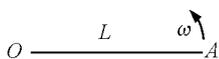


图1 导体棒绕O点旋转

由于棒上各点线速度不同,我们可以利用沿棒方向的平均速度来计算两端的电势差大小 $B = BL\bar{v}$,同时 v 沿半径方向线性变化,则 $\bar{v} = v_{\text{中}}$ (棒中点的线速度)^[1],于是棒两端的电势差大小

$$E = BL\bar{v} = BLv_{\text{中}} = \frac{1}{2}B\omega L^2$$

例如2015年全国理综II卷第15题、2016年全国理综III卷第21题、II卷第20题等就可以利用上式轻松求解棒两端的电势差大小.

(2) 绕棒所在直线上的某一点(非两端点)旋转

如图2所示,导体棒绕O点旋转.

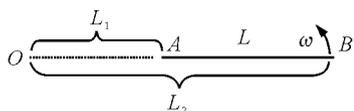


图2 导体棒绕棒所在直线上任一点旋转

棒两端的电势差大小^[2]

$$E = BL\bar{v} = BLv_{\text{中}} = \frac{1}{2}B\omega(L_2^2 - L_1^2)$$

例如2014年全国理综II第25题利用上面的公式我们可以轻松求解题目.

2 导体棒绕任意点(非棒所在直线上的点)旋转

(1) 绕距棒两端点距离之和是定值($L_2 + L_1 = M$)的点旋转

如图3所示,固定点到两端点距离之和是定值;

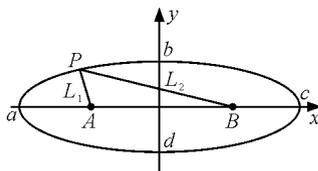


图3 固定点与两端点距离之和为定值

点的轨迹是以两端点为焦点的椭圆,于是棒两端的电势差大小为

$$E_{AB} = \frac{1}{2}B\omega | (L_2^2 - L_1^2) | =$$

$$\frac{1}{2}B\omega | (M^2 - 2ML_1) |$$

E_{AB} 随 L_1 成线性变化规律,当 $L_1 = L_2$ 时 $E_{AB} = 0$,固定点沿椭圆从 $a \rightarrow b \rightarrow c$ 过程,AB 两点间的电势差大小先变小后变大,当固定点在 a 或 c 点时 AB 两点间的电势差大小相等,且固定点在该椭圆上的最大值.

(2) 绕距棒两端点距离之差是定值($L_2 - L_1 =$

M) 的点旋转

固定点到两端点距离之差是定值的点的轨迹是以两端点为焦点的双曲线,如图4所示.

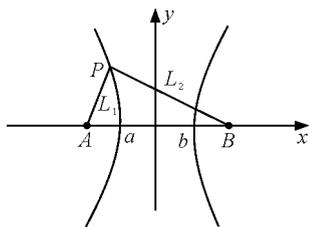


图4 固定点与两端点距离之差为定值

棒两端的电势差大小为

$$E_{AB} = \frac{1}{2} B\omega | (L_2^2 - L_1^2) | = \frac{1}{2} B\omega | (M^2 - 2ML_1) |$$

E_{AB} 随 L_1 成线性变化规律, 电势差 E_{AB} 随着 L_1 的增大而变大, 固定点 P 在 a 或 b 是在双曲线上时电势差大小最小的点.

(3) 绕距棒两端点距离的平方和是定值 ($L_2^2 + L_1^2 = M$) 的点旋转

如图5所示.

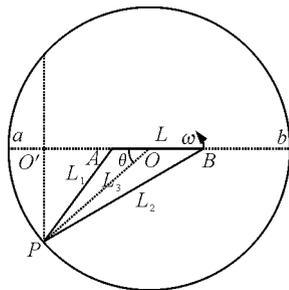


图5 绕棒两端点距离平方和为定值

棒两端的电势差大小为

$$E_{AB} = \frac{1}{2} B\omega (L_2^2 - L_1^2) \quad (1)$$

O 点为棒 AB 的中点, $PO = L_3$; $\angle AOP = \theta$, 由余弦定理得出

$$L_2^2 = L_3^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 - 2L_3 \left(\frac{L}{2}\right) \cos(\pi - \theta) \quad (2)$$

$$L_1^2 = L_3^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 - 2L_3 \left(\frac{L}{2}\right) \cos \theta \quad (3)$$

将(2)、(3)两式相加, 得

$$L_2^2 + L_1^2 = 2L_3^2 + \frac{1}{2}L^2 \quad (4)$$

从式(4)中可以看出若 L_3 是定值, 则 $L_2^2 + L_1^2 = A$, 即固定点在以棒中点为圆心, L_3 为半径的圆周上, 则棒两端电势差的大小为

$$E_{AB} = \left| \frac{1}{2} B\omega (L_2^2 - L_1^2) \right| = \frac{1}{2} B\omega | (M - 2L_1^2) |$$

当 $L_1 = L_2$ 时, $E_{AB} = 0$, 固定点在 a 、 b 两点电势差大小最大.

(4) 绕距棒两端点距离的平方差是定值 ($L_2^2 - L_1^2 = M$) 的点旋转

如图5所示, 在上面的推导中, 我们发现如果(2)、(3)两式相减, 我们会得到

$$L_2^2 - L_1^2 = 2L_3 L \cos \theta \quad (5)$$

从式(5)中看到若 $L_3 L \cos \theta$ 是定值(固定点的轨迹为垂直于棒的直线), 则会满足 $L_2^2 - L_1^2$ 是定值, 将式(5)代入式(1)得

$$E_{AB} = B\omega L L_3 L \cos \theta \quad (6)$$

是定值, 即绕垂直于棒的直线上各点转动的棒两端的电势差是定值. 推导的过程中我们发现固定点在任意位置, $E_{AB} = B\omega L L_3 L \cos \theta$ 恒成立, 仔细分析发现, 式(6)中的 $\omega L_3 \cos \theta = \omega |O'O|$ 是棒绕 O' 转动的棒中点线速度, 棒两端的电势差大小可以写成: $E_{AB} = BLv'_{\text{中}}$ (棒绕 O' 转动的棒中点线速度), 在判断棒两端电势差大小及如何变化时, 直接看 $|O'O|$ 如何变化就可以了, 非常简单明了.

可见, 导体棒在垂直磁场的平面内旋转, 无论固定点在哪里, 我们都可以用统一的公式来表示棒两端的电势差大小即

$$E_{AB} = BL\bar{v} = BLv'_{\text{中}}$$

其中 $v'_{\text{中}} = \omega |O'O|$ 是以过固定点的垂线与棒的交点为固定点转动棒中点的线速度, \bar{v} 为沿棒方向速度的平均值.

参考文献

- 1 杨培军 王鹏. 数学平均值在物理上的应用. 物理通报, 2015(5):22~25
- 2 陈永梅. 妙用平均速度巧解2014年高考理综(新课标2卷)第25题. 中学物理, 2015, 33(05):85