

内壁粗糙碗中的动力学问题深度探究(二)

倪 峰

(德清县高级中学 浙江 湖州 313200)

(收稿日期:2016-08-29)

摘 要:为更深入探究内壁粗糙碗中的动力学问题,利用 Mathematica 数学软件计算和画出了物体逆时针运动的角度 θ 与运动时间 t 的图像关系和物体逆时针运动的角速度 ω 与运动时间 t 的图像关系,从图像关系可以准确得到在某时刻对应的角度、角速度、速度.

关键词:内壁粗糙的碗 竖直轨道 动力学 二阶非线性常微分方程 Mathematica

具体模型如图 1 所示,物体(可看成质点的物体)在内壁粗糙的碗中从 A 点向下逆时针下滑,物体与粗糙内壁的动摩擦因数为 μ .

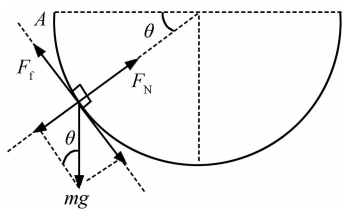


图 1 情境图

从 A 点下滑到第一次速度为零的位置的整个过程,物体受到 3 个力的作用,分别是重力 mg ,摩擦力 F_f ,支持力 F_N . 除重力外,其他两个力都是变力. 在文献[1]中,笔者推导出物体逆时针运动的角速度 ω 与转过的角度 θ 的函数关系,即给出了 ω 与 θ 的解析解

$$\omega = \left\{ \frac{2g}{r(1+4\mu^2)} [(1-2\mu^2)\sin\theta + 3\mu\cos\theta - 3\mu e^{-2\theta}] \right\}^{\frac{1}{2}}$$

并利用 Excel 画出了 ω 与 θ 的图像关系,可以得到物体在粗糙碗中从 A 点下滑做逆时针圆周运动到第一次速度为零这个过程,轨道上各个位置所对应的角速度和速度. 那么, θ 与 t , ω 与 t 之间又有什么关系呢?

1 小球在粗糙内壁逆时针下滑的 θ 与 t 及 ω 与 t 的解析解

根据推导得出的 ω 与 θ 的解析解

$$\omega = \left\{ \frac{2g}{r(1+4\mu^2)} [(1-2\mu^2)\sin\theta + 3\mu\cos\theta - 3\mu e^{-2\theta}] \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$3\mu\cos\theta - 3\mu e^{-2\theta}]^{\frac{1}{2}}$$

由 $\omega = \frac{d\theta}{dt}$, 化简得

$$\left\{ \frac{2g}{r(1+4\mu^2)} [(1-2\mu^2)\sin\theta + 3\mu\cos\theta - 3\mu e^{-2\theta}] \right\}^{\frac{1}{2}} d\theta = dt \quad (1)$$

对式(1)两边积分得

$$\int_0^\theta \left\{ \frac{2g}{r(1+4\mu^2)} [(1-2\mu^2)\sin\theta + 3\mu\cos\theta - 3\mu e^{-2\theta}] \right\}^{\frac{1}{2}} d\theta = \int_0^t dt \quad (2)$$

式(2)比较复杂,笔算无法推导 θ 与 t 的解析解和 ω 与 t 的解析函数.

2 利用 Mathematica 数值解法画出 $\theta-t$ 和 $\omega-t$ 图像

取 $g = 9.8 \text{ m/s}^2$, $r = 1 \text{ m}$. 分别画出 $\mu = 0, 0.1, 0.5, 0.8$ 时, θ 与 t , ω 与 t 的图像,具体编程如下所示:

Quit

$g = \frac{98}{10}; r = 1;$

PlotStyle0 = {{Red, Thickness[0.015]}, {Green, Thickness[0.015]}, {Black, Thickness[0.015]}, {Blue, Thickness[0.015]}, {Purple, Dashing[{0.01, 0.05}, 0.01]}, Thickness[0.005]}, {Green, Dashing[{0.01, 0.02, 0.05]}, Thickness[0.005]}}; of[μ]: =

FindRoot[$\frac{2g}{r * (1 + 4\mu^2)} ((1 - 2\mu^2) \text{Sin}[\theta] + 3\mu$

```

Cos[θ] - 3μExp[-2θ]) = 0, {θ, 2}][[1, 2]]
tjie[μ_, θθ_] := NIntegrate[ $\frac{2g}{r * (1 + 4\mu^2)}$  *
((1 - 2μ²)Sin[θ] + 3μCos[θ] - 3μExp[-2θ]))-1/2,
{θ, 0, θθ}]
fig[μ_, style_] := ParametricPlot[{Re[tjie[μ_, θθ]],
θθ}, {θ, 0, θf[μ]}, PlotStyle -> PlotStyle0[[style]],
AxesLabel -> {"t", "θ"}, BaseStyle -> {Large},
AxesStyle -> Arrowheads[0.06], RotateLabel ->
True, PlotRange -> All, AxesOrigin -> {0, 0}]
figA[μ_, style_] := ParametricPlot[{Re[tjie
[u, θθ]], ( $\frac{2g}{r * (1 + 4\mu^2)}$  * (1 - 2μ²)Sin[θθ] +
3μCos[θθ] - 3μExp[-2μθθ]))1/2}, {θθ, 0, θf[μ]},
PlotStyle -> PlotStyle0[[style]], AxesLabel ->
{"t", "dθ/dt"}, BaseStyle -> {Large}, AxesStyle ->
Arrowheads[0.06], RotateLabel -> True, PlotRange ->
All, AxesOrigin -> {0, 0}]
"μ = 0, t[0]" -> tjie[0, 0.0001]"μ = 0.1,
t[0]" -> tjie[0.1, 0.0001]
"μ = 0.5, t[0]" -> tjie[0.5, 0.0001]
"μ = 0.8, t[0]" -> tjie[0.8, 0.0001]
"μ = 0, θf" -> f[0]
"μ = 0.1, θf" -> θf[0.1]
"μ = 0.5, θf" -> θf[0.5]
"μ = 0.8, θf" -> θf[0.8]
μ = 0, t[0] -> 0.00451754
μ = 0.1, t[0] -> 0.00451755
μ = 0.5, t[0] -> 0.0045176
μ = 0.8, t[0] -> 0.00451763 - 2.36667
μ = 0, θf -> 3.14159
μ = 0.1, θf -> 2.67214
μ = 0.5, θf -> 1.72223
μ = 0.8, θf -> 1.33753
Show[{fig[0, 1], fig[ $\frac{1}{10}$ , 2], fig[ $\frac{5}{10}$ , 3], fig[ $\frac{8}{10}$ ,
4]}]]
Show[{figA[0, 1], figA[ $\frac{1}{10}$ , 2], figA[ $\frac{5}{10}$ , 3],
figA[ $\frac{8}{10}$ , 4]}]]

```

写完倒数第二行程序后,按 Shift + Enter 运行,

得到角度 θ 与时间 t 的图像,如图 2 所示.从图 2 可以得到,物体在粗糙碗中从 A 点下滑做逆时针圆周运动到第一次速度为零这个过程,某时刻物体对应应在轨道上的位置.写完最后一行程序后,按 Shift + Enter 运行,得到角速度 ω 与时间 t 的图像,如图 3 所示.从图 3 可以得到,物体在粗糙碗中从 A 点下滑做逆时针圆周运动到第一次速度为零这个过程,某时刻物体对应的角速度.

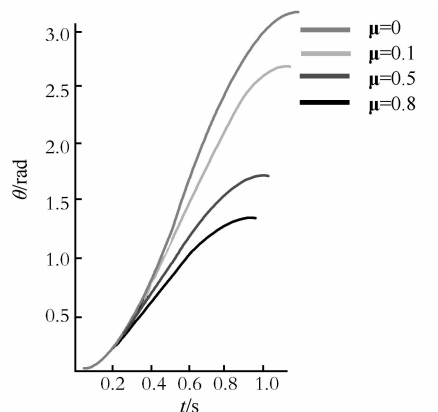


图 2 角度 θ 与时间 t 的关系

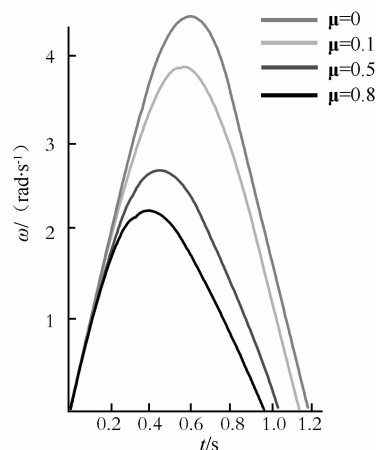


图 3 角速度 ω 与时间 t 的关系

在具体应用过程中,对应不同的动摩擦因数 μ ,求不同时刻对应的角度和角速度,只需要在程序当中改变 μ 这个参数的大小即可,然后再按 Shift + Enter 运行,就能得到相应的图像关系.若读者需要以上程序,或进行学术交流,可直接与笔者联系.

参考文献

- 程守洙,江之勇.普通物理学 2(第 5 版).北京:高等教育出版社,2003.25 ~ 28
- 马文蔚.物理学(第 3 版).北京:高等教育出版社,1994.5 ~ 20

(下转第 67 页)

b. 减小盘旋飞行时内侧机翼的安装角

以牺牲部分升力为代价,使滑翔机整体倾斜,充分发挥了盘旋飞行的稳定性优势.但是,滑翔机的经济迎角一般在 3° 左右,在此基础上想要减小安装角,实际制作中达不到这么高的精度.

c. 偏转垂直尾翼

由于滑翔机飞行速度较快,垂直尾翼稍稍偏转就会受到很大的空气阻力,使滑翔机出现明显的侧滑.但对垂直尾翼的强度要求特别高,而且侧滑的幅度也不容易控制.

d. 外侧机翼前移

当外侧机翼前移,升力的水平分力必定会产生对重心的力矩,并且,即使只有微小的力臂,只要升力足够大,就能够使滑翔机偏转.不过这种方法也只是让机头转,整机仍保持水平.

综上所述 4 种能够实现盘旋的途径,a 和 b 两种都是通过倾斜滑翔机达到盘旋,c 和 d 则是通过扭转机头达到盘旋.考虑滑翔机具有一旦掷出就不能人为调整其飞行姿态的特殊性,以及实际制作中能够达到的精度水平,可将前置盘旋飞行时外侧机翼,同

时减小内侧机翼的安装角,使滑翔机即有扭转机头的动作,又有整机倾斜辅助盘旋,达到理想的盘旋姿态,并且充分发挥了盘旋飞行适应外界气流的能力.

故推荐 b 和 d 两组方案结合使用.

6 总结

我们利用力学基本知识分析了滑翔机盘旋滑翔的过程,提供了盘旋滑翔设计思路与方案,并对不同方案进行评估,得到了一些有用的结果.本文中的滑翔机盘旋设计特别为大学生在参加滑翔机竞时一类比赛中提供了可靠的理论依据.另外,理论分析和动手实践这个过程能够紧紧抓住学生的兴趣,使学生有动力、有信心来探索滑翔机滑翔飞行背后的一些力学原理.

参考文献

- 1 马丁·西蒙斯. 模型飞机空气动力学. 北京:航空工业出版社,2007.109 ~ 111
- 2 张国强, 吴家鸣. 流体力学. 北京:机械工业出版社,2006.90 ~ 93
- 3 谭楚雄. 模型飞机调整原理. 北京:航空工业出版社,2007.26 ~ 34

(上接第 63 页)

华大学出版社,2010

3 董键. Mathematica 与大学物理计算(第 2 版). 北京:清

In-depth Research on the Dynamic Issue in Rough Bowl Wall(II)

Ni Feng

(Deqing Senior high school, Huzhou, Zhejiang 313200)

Abstract: The author deduced the relationships between angular velocity ω and angle of turn θ and drew the picture of ω with θ in the in-depth dynamic research in rough bowl wall(I). We can get corresponding ω and velocity v in the different orbit positions when the object rolls down from A point in the rough bowl wall to the position with zero velocity for the first time. In order to research the dynamic in rough bowl wall deeply, in this paper we calculate and draw the pictures of θ with t and ω with t by Mathematica when the object do anticlockwise motion. We can get corresponding θ , ω and v accurately in different time from the pictures.

Key words: rough bowl wall; a vertical track; dynamic; the second order ordinary differential equation; mathematica