

对最大电动势出现位置的探讨

魏明逊 赵继娇

(昆明第三中学 云南 昆明 650500)

(收稿日期:2016-10-06)

摘要:许多参考资料对“闭合金属框在匀强磁场中转动时,于何处取得最大电动势”,这个问题的解释是模糊的,有必要进行一定的证明使结论更加完整.

关键词:电动势 教学 问题

1 提出问题

金太阳教育研究院出版的《全国100所名校单元测试示范卷》中有这样一道题,如图1所示,匀强磁场的磁感应强度为 B ,方向竖直向下,在磁场中有一个边长为 L 的正方形刚性金属框, ab 边的质量为 m ,电阻为 R ,其他3边的质量和电阻均不计. cd 边上装有固定的水平轴,将金属框自水平位置由静止释放,第一次转到竖直位置时, ab 边的速度为 v ,不计一切摩擦,重力加速度为 g ,则在这个过程中,下列说法正确的是

- A. 通过 ab 边的电流方向为 $a \rightarrow b$
- B. ab 边经过最低点时的速度 $v = \sqrt{2gL}$
- C. a 与 b 两点间的电压逐渐变大
- D. 金属框中产生的焦耳热为 $mgL - \frac{1}{2}mv^2$

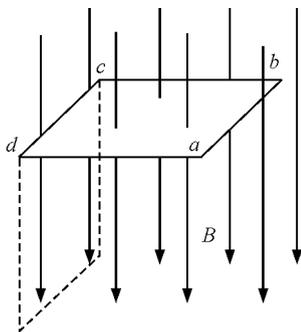


图1 题图

答案选D. C答案的解释:金属框摆动过程中, ab 边受安培力作用,故当重力和安培力沿其摆动方向分力的合力为零时, ab 边的速度最大, a 与 b 两点

间电压最大,所以C错误.在百度上搜索发现基本上都是这个解释.对C答案的解释都是含糊的.速度最大时, ab 边速度与磁场 B 是存在夹角的.要完整的回答这个问题必须解决什么时候 ab 边的速度最大,才能进一步探讨什么地方 ab 两点间的电压最大.

2 解决问题

根据刚体定轴转动定律:刚体所受的对于某一固定转轴的合外力矩等于刚体对此转轴的转动惯量与刚体在此合外力矩作用下所获得的角加速度的乘积,如图2所示.

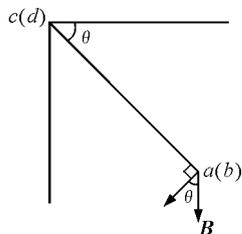


图2 受力分析

$$M = I\beta$$

$$mgl \cos \theta - \frac{B^2 l^4 \sin^2 \theta}{R} \omega = ml^2 \frac{d\omega}{dt}$$

$$mgl \cos \theta - \frac{B^2 l^4 \sin^2 \theta}{R} \omega = ml^2 \frac{d\omega}{d\theta} \frac{d\theta}{dt}$$

$$mgl \cos \theta - \frac{B^2 l^4 \sin^2 \theta}{R} \omega = ml^2 \omega \frac{d\omega}{d\theta}$$

$$mg \cos \theta - \frac{B^2 l^3 \sin^2 \theta}{R} \omega = ml \omega \frac{d\omega}{d\theta} \quad (1)$$

该方程没有解析解,可以借助计算机软件解出数值解,令

$$y = \omega^2$$

$$A = \frac{g}{l}$$

$$C = \frac{B^2 l^3}{mR}$$

式(1)简化为

$$\frac{dy}{d\theta} = 2(A \cos \theta - C\sqrt{y} \sin^2 \theta) \quad (2)$$

即

$$y' = 2(A \cos \theta - C\sqrt{y} \sin^2 \theta) \quad (3)$$

利用 Matlab 软件解出式(3)的数值解,得到两组数据,一组表示 θ 角,另一组表示 y (也就是 ω^2),但我们的最终目的是解出电动势 $E = B\omega l^2 \sin \theta$ 的最大值,为简便,我们令 $D = Bl^2, \epsilon = x$,则上式变为

$$x = D\sqrt{y} \sin \theta \quad (4)$$

Matlab 的计算结果如表 1 所示.

表 1 计算结果

取 $A = 1, C = 0.1, D = 1$		
角度 / (θ)	$y/(\omega^2)$	$x/(E)$
0	0	0
0.001 439 205	5.023 77E-05	1.780 39E-07
0.004 317 615	0.000 150 713	9.251 17E-07
0.012 952 844	0.000 452 14	4.807 05E-06
0.027 344 893	0.000 954 517	1.474 50E-05
0.070 521 041	0.002 461 648	6.106 73E-05
0.142 481 286	0.004 973 530	0.000 175 375
0.358 362 023	0.012 509 111	0.000 699 535
0.718 163 251	0.025 067 952	0.001 984 489
1.797 566 934	0.062 736 191	0.007 856 883
3.596 573 074	0.125 456 648	0.022 219 171
6.746 076 143	0.234 893 759	0.056 932 525
11.246 076 14	0.389 778 321	0.121 757 302
15.746 076 14	0.541 887 639	0.199 766 986
20.246 076 14	0.690 056 861	0.287 464 893
24.746 076 14	0.833 128 744	0.382 078 618
29.246 076 14	0.969 972 625	0.481 170 473
33.746 076 14	1.099 504 854	0.582 496 108

续表

角度 / (θ)	$y/(\omega^2)$	$x/(E)$
38.246 076 14	1.220 704 987	0.683 949 739
42.746 076 14	1.332 632 621	0.783 547 543
47.246 076 14	1.434 439 975	0.879 428 499
51.746 076 14	1.525 383 857	0.969 864 549
56.246 076 14	1.604 833 552	1.053 274 342
60.746 076 14	1.672 276 932	1.128 238 433
65.246 076 14	1.727 323 098	1.193 513 678
69.746 076 14	1.769 702 411	1.248 045 922
74.246 076 14	1.799 264 058	1.290 980 263
78.746 076 14	1.815 970 636	1.321 668 176
83.246 076 14	1.819 891 530	1.339 671 808
86.622 057 11	1.814 535 882	1.344 706 718
87.748 038 07	1.811 186 925	1.344 764 074
88.874 019 04	1.807 063 466	1.344 011 034
90	1.802 170 280	1.342 449 358

接下来我们利用 Excel 软件把刚才的数据用图像的形式直观地表达出来.

作出 $y - \theta$ 的图像,如图 3 所示.

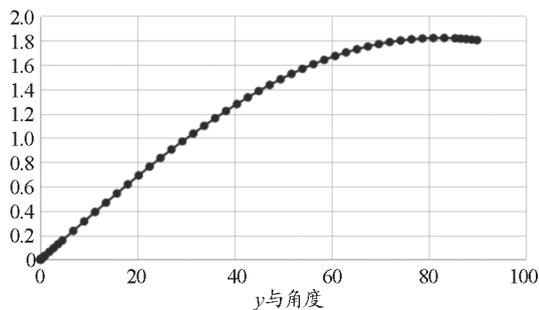


图 3 $y - \theta$ 图像

再作出 $x - \theta$ 的图像,然后线性拟合,得到 x_{\max} ,即 E_{\max} .如图 4 所示.

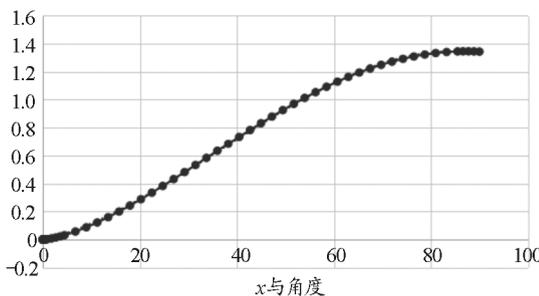


图 4 $x - \theta$ 图像

“燃料消耗”的物理“链接”

徐正海

(当涂第一中学 安徽 马鞍山 243100)

(收稿日期:2016-08-24)

在中学物理题库中,关于“汽车行驶”及“卫星发射”过程中的燃料消耗问题,其中有些疑问一直困扰着教学,需要解析.因为它们牵涉到人们对“能量转化与守恒定律”底线的坚守.

【例1】两辆汽车A和B,沿公路以速度 v 运动着,以后A的速度增加到 $2v$.相对于公路站着不动的观察者,认为汽车A的动能增加为 $\Delta E_1 = \frac{3}{2}mv^2$;

而汽车B内的观察者认为增加 $\Delta E_2 = \frac{1}{2}mv^2$.试解释为什么两个观察者所得到的能量差不一样?观察者怎样物理思考来表达烧掉燃料的热能?

解析:毋庸置疑,参考系是解决动力学问题的基本平台.故在处理具体问题时,参考系选择要恰当,前后要唯一.

(1)在A车以匀速 v 匀速行驶时,选取与此时地面相对静止的参考系(不像题中所说公路上站立不动的观察者)来观察烧油问题.记地球质量 M ,A车质量为 m .

A车从初速 v 增加到末速 $2v$ 的过程中,动能增量

$$\Delta E_{kA} = \frac{1}{2}m(2v)^2 - \frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}mv^2$$

其来源是烧油提供热能 Q_1 的转化;与此同时,在汽车A加速运动过程中,地球 M (除A车外)与汽车A发生了(被忽视的)相互作用,由于地球与A车的两体系统动量守恒,并设地球末速度为 v_1 ,则有

$$mv = -Mv_1 + m \cdot 2v$$

这样一来,地球动能的增量为

$$\Delta E_{kM} = \frac{1}{2}Mv_1^2 = \frac{m^2}{2M}v^2$$

这部分能量是来自烧油热能 Q_2 所提供.综合起来,总烧油所产生的热能

$$Q = Q_1 + Q_2 = \frac{3}{2}mv^2 + \frac{m^2}{2M}v^2$$

(2)站在B车上看A车加速运动的烧油问题(严格上讲,选取的是在A车匀速行驶时与B车相对静止的参考系).烧油所产生的第一部分热能 Q_1 用来增加A车要增加的动能

综上所述 a 与 b 两点间的电压在这一过程中是先变大后变小,题目超出了中学的范畴,建议以后再出现多个参数变化的情况要仔细验证,当然也可以把题目提交到物理兴趣小组中进行讨论,学生总有更好的方法解决.

3 结论

当角度为 83.246° 时,线框速度最大,当角度为 87.748° 时,电动势有最大值,为 $1.344\ 764\text{ V}$,而且A,C,D不同的取值会导致不同的极值,但都可以得到速度最大时,电动势并不是最大的的结论.

Discussion on the Position of Maximum Electromotive Force

Wei Mingxun Zhao Jijiao

(Kunming Number 3 Middle School, Kunming, Yunnan 650500)

Abstract: The explanation of "the maximum electromotive force of the closed metal frame rolling in the uniform magnetic field" is still fuzzy in many references. As a result, it's necessary to prove its correctness and make it more complete, meanwhile help to deepen the understanding of students.

Key words: electromotive force; teaching; problem