用“独孤四剑”破解几何关系 求半径和圆心角

蒋金团
（施甸一中　云南 保山　678200）

（收稿日期:2016－10－18）

摘　要:介绍了用解三角形的方法处理带电粒子在有界磁场中的圆周运动.

关键词:有界匀强磁场　圆周运动　正弦定理　余弦定理　和差角公式

带电粒子在有界磁场中的运动是一类典型的高考题,这类题型的特点是物理部分简单,数学部分较复杂.物理部分只用到 3 个公式而已

$$qvB = \frac{mv^2}{r}$$

$$r = \frac{mv}{qB}$$

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi m}{qB}$$

从半径公式可以看出,半径是联系粒子信息和几何条件的桥梁,因此,几何关系求半径是重中之重.笔者在研究高考真题的基础之上,总结出一套比较实用的通性解法,该方法有 4 个关键点,姑且借用武侠小说称呼,取名“独孤四剑”吧.“独孤四剑”的精髓在于:构造三角形,以公共边为桥梁,实现半径和已知条件的联系,将物理问题彻底转化为数学中的解三角形问题.

“独孤四剑”操作步骤如下:

(1)第一剑,定圆心.两个速度垂线的交点为圆心,一个速度垂线和一条弦的中垂线的交点也为圆心.

(2)第二剑,定三角形.用到的三角形有两类,第一类是含有半径的三角形,第二类是含有已知边长或角度的三角形.

(3)第三剑,转移角度.将设定的角度和已知的角度转到设定的三角形中.转移的依据,一是速度偏转角等于转过的圆心角,二是弦切角定理.

(4)第四剑,以公共边为桥梁解三角形.

情况一:三角形为直角三角形或等腰三角形时,采用三角函数.

情况二:三角形为斜三角形时,可能用到正弦定理、余弦定理、和差角公式.

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

接下来,将选择两个压轴题作为示范,展现“独孤四剑”的实用性,感兴趣的朋友可以上网查阅参考答案,将两种解法进行对比.

【例 1】(2013 年高考大纲卷)如图 1 所示,虚线 OL 与 y 轴的夹角 $\theta = 60°$,在此角范围内有垂直于 xOy 平面向外的匀强磁场,磁感应强度大小为 B.一质量为 m,电荷量为 $q(q > 0)$ 的粒子从左侧平行于 x 轴射入磁场,入射点为 M.粒子在磁场中运动的轨道半径为 R.粒子离开磁场后的运动轨迹与 x 轴交于 P 点(图中未画出),且 $OP = R$.不计重力.求 M 点到 O 点的距离和粒子在磁场中运动的时间.

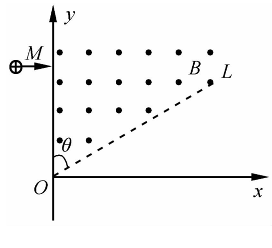

图 1　例 1 题图

解析:(1)第一剑,定圆心.如图 2 所示,粒子进入磁场后做匀速圆周运动,设运动轨迹交虚线 OL 于 A 点,入射速度的垂线和弦的中垂线的交点即为圆心 C.

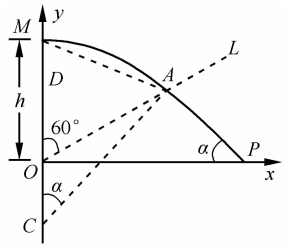

图 2　确定圆心

(2) 第二剑,定三角形.题目中已知 $OP = R$,说明必须用一条公弦将 OP 边和半径联系起来,所以可以解 $\triangle COA$ 和 $\triangle OAP$.

(3) 第三剑,将角度转移到设定的三角形中.设圆心角为 α,根据速度偏转角等于圆心角可知 $\angle OPA = \alpha$.

(4) 第四剑,用公共边作为桥梁解三角形.

在 $\triangle COA$ 中,由正弦定理得

$$\frac{OA}{\sin\alpha} = \frac{CA}{\sin 120^\circ} = \frac{R}{\sin 120^\circ}$$

变形得

$$OA = \frac{R\sin\alpha}{\sin 120^\circ} \tag{1}$$

在 $\triangle OAP$,由正弦定理得

$$\frac{OA}{\sin\alpha} = \frac{OP}{\sin(150^\circ - \alpha)} = \frac{R}{\sin(150^\circ - \alpha)}$$

变形得

$$OA = \frac{R\sin\alpha}{\sin(150^\circ - \alpha)} \tag{2}$$

由式(1)、(2) 得

$$\sin 120^\circ = \sin(150^\circ - \alpha)$$

即

$$\sin 120^\circ = \sin 150^\circ\cos\alpha - \sin\alpha\cos 150^\circ$$

化简得　$\sqrt{3} - \cos\alpha = \sqrt{3}\sin\alpha$

两边平方再化简得

$$\cos\alpha(4\cos\alpha - 2\sqrt{3}) = 0$$

解得 $\alpha = 30^\circ$ 或 $\alpha = 90^\circ$.

带电粒子做圆周运动时,由圆周运动规律,有

$$qvB = \frac{mv^2}{r} \qquad r = \frac{mv}{qB}$$

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi m}{qB} \qquad t = \frac{\alpha}{360^\circ} \times \frac{2\pi m}{qB}$$

当 $\alpha = 30^\circ$ 时,有

$$t = \frac{\pi m}{6qB}$$

当 $\alpha = 90^\circ$ 时,有

$$t = \frac{\pi m}{2qB}$$

在 $\triangle COA$ 中,由正弦定理得

$$\frac{OC}{\sin(60^\circ - \alpha)} = \frac{R}{\sin 120^\circ}$$

变形得

$$OC = \frac{R\sin(60^\circ - \alpha)}{\sin 120^\circ}$$

由几何关系得

$$h = R - OC = R - \frac{R\sin(60^\circ - \alpha)}{\sin 120^\circ}$$

当 $\alpha = 30^\circ$ 时,有

$$h = R\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

当 $\alpha = 90^\circ$ 时,有

$$h = R\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

【例 2】(2012 年高考新课标卷) 如图 3 所示,一半径为 R 的圆表示一柱形区域的横截面(纸面).在柱形区域内加一方向垂直于纸面的匀强磁场,一质量为 m,电荷量为 q 的粒子沿图中直线在圆上的 a 点射入柱形区域,在圆上的 b 点离开该区域,离开时速度方向与直线垂直.圆心 O 到直线的距离为 $\frac{3}{5}R$.现将磁场换为平行于纸面且垂直于直线的匀强电场,同一粒子以同样速度沿直线在 a 点射入柱形区域,也在 b 点离开该区域.若磁感应强度大小为 B,不计重力,求电场强度的大小.

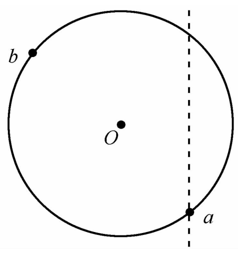

图 3　例 2 题图

解析:总体分析,本题涉及两次运动,磁场偏转和电场偏转,两次运动的联系是初速度相同,并且最后求的是电场,所以思路是,先用磁偏转求出初速

度,再代入电偏转中.

情况 1:带电粒子在磁场中做圆周运动时,由牛顿第二定律得

$$qvB = \frac{mv^2}{r} \qquad r = \frac{mv}{qB} \tag{3}$$

(1) 第一剑,定圆心.如图 4 所示,入射速度垂线和出射速度垂线的交点为圆心 F.设轨道半径为 r,而边界圆的半径为 R(已知的),两者要区分开.

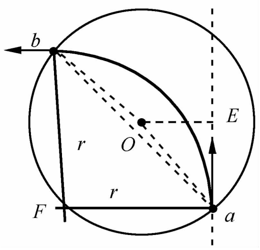

图 4 确定圆心

(2) 第二剑,定三角形.两圆相交,先把交点处的 4 个半径和公共弦连起.显然,两个半径三角形不可少,然后 Rt$\triangle OaE$ 的已知条件多,它也入选.

(3) 第三剑,将角度转移到设定的三角形中,Rt$\triangle Fab$ 是等腰直角三角形,$\angle Fab = 45°$.

(4) 第四剑,用公共边作为桥梁解三角形.在 $\triangle OaE$ 中,设 $\angle OaE = \alpha$,则

$$\sin\alpha = \frac{OE}{Oa} = \frac{3}{5}$$

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \frac{4}{5}$$

在 $\triangle Oab$ 中

$$\angle Oab = 90° - \alpha - 45° = 45° - \alpha$$

由几何关系得

$$ab = 2R\cos\angle Oab = 2R\cos(45° - \alpha) \tag{4}$$

在 $\triangle Fab$ 中,由几何关系得

$$ab = \sqrt{2}r \tag{5}$$

联立式(4)、(5) 得

$$r = \sqrt{2}R\cos(45° - \alpha) \tag{6}$$

$$\cos(45° - \alpha) = \cos 45°\cos\alpha + \sin 45°\sin\alpha =$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{4}{5} + \frac{3}{5}\right) = \frac{7\sqrt{2}}{10} \tag{7}$$

联立式(6)、(7) 得

$$r = \frac{7R}{5} \tag{8}$$

联立式(3)、(8) 得

$$v = \frac{7qBR}{5m} \tag{9}$$

情况 2:带电粒子在电场中做类平抛运动时,竖直方向

$$r = vt \tag{10}$$

水平方向

$$r = \frac{1}{2}\frac{qE}{m}t^2 \tag{11}$$

联立式(8) ~ (11) 得

$$E = \frac{14qRB^2}{5m}$$

综上所述,使用数学方法处理物理问题具有可靠性、严密性、直观性等特点,因此,在物理中适度推广数学知识是很有必要的.

Cracking the Geometry Relation Using *Tokgo Four Swords* to Solve the Radius and Central Angle

Jiang Jintuan

(Shidian NO.1 High School, Baoshan, Yunnan 678200)

Abstract: in this paper, the solution of the periodic motion of charged particles in a magnetic field is presented.

Key words: bounded uniform magnetic field; circular motion; sine theorem; cosine theorem; difference angle formula