



利用安培力的冲量公式巧解难题

郑金

(凌源市职教中心 辽宁 朝阳 122500)

(收稿日期:2016-11-06)

摘要:简单地推导了安培力的冲量公式的两种形式以及电荷量与磁通量变化量的关系式,利用安培力的冲量公式和动量定理巧妙解答几道有关圆形线圈穿越磁场而引起电磁感应的难题.

关键词:电磁感应 安培力 冲量公式 圆形线圈

安培力的关系式有多种形式,如 $F_A = BLI = \frac{B^2 L^2 v}{R}$,因此安培力的冲量公式也有多种形式,如

$$\bar{F}_A t = BL \bar{I} t = BLq$$

$$\bar{F}_A t = \frac{B^2 L^2 \bar{v}}{R} t = \frac{B^2 L^2}{R} x = kx$$

将二者联立可得电荷量与磁通量变化量的关系式

$$q = \frac{BL}{R} x = \frac{B \Delta S}{R} = \frac{\Delta \Phi}{R}$$

若写成 $q = \frac{BL}{R} x = \frac{BS}{R} = \frac{\Phi}{R}$,则是错误的. 因为 Lx 是导体在做切割磁感线运动时扫过磁场区域的面积,即在闭合电路中磁场区域面积的变化量 $\Delta S = Lx$,若线圈的匝数为 n ,则 $q = n \frac{\Delta \Phi}{R}$.

当用“电磁感应笔”的笔尖在特制的书写板上书写时,电池正极、笔尖、书写板、鳄鱼夹通过导线与电池负极形成了通断的电流回路,PVC管中流过通断变化的直线电流,PVC管周围激发出环形变化的磁场,引起绕在磁环上线圈中的磁通量的变化,产生感应电动势和感应电流,使套在PVC管上与线圈连接的LED不断闪亮.

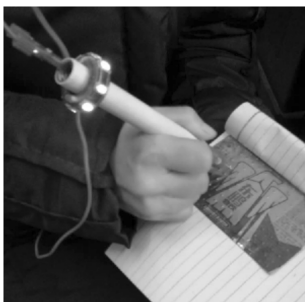


图6 组装完成的“电磁感应笔”

通过“电磁感应笔”还可将奥斯特的“电生磁”,与法拉第的“磁生电”有机地统一起来.实验装置如图7所示.

上述实验过程中还可引导学生进一步观察思考以下内容,为后续学习奠定基础:(1)“电磁感应笔”

为何只有书写过程中LED才有闪亮,不书写时不论笔尖接触的是绝缘层还是导通层,LED都不亮;(2)书写时为何与线圈连接的正反向的LED都会闪亮;(3)将实验中的电源直接连接LED,其亮度却很低,而同样的这组电池,在书写的过程中引起线圈上LED的亮度却大为增强,这说明线圈中产生的电的某些方面的性能比原有电池还强.从而有效激发学生的进一步思考,增强学生学习的主动性和积极性.



图7 用“电磁感应笔”“磁生电”和“电生磁”

参考文献

- 1 人民教育出版社.普通高中课程标准实验教科书 物理·选修3-2(第2版).北京:人民教育出版社,2010.2~5
- 2 熊小兰,黄春如.模拟制作法拉第线圈.物理教师,2017(02):56~57

灵活应用安培力的冲量公式和动量定理解答有关问题,可化繁为简,下面举例分析.

【例1】如图1所示,很长的光滑磁棒竖直固定在水平面上,在它的侧面有均匀向外的辐射状的磁场.磁棒套一个质量均匀的圆形线圈,质量为 m ,半径为 r ,电阻为 R ,线圈所在磁场处的磁感应强度为 B .让线圈从磁棒上端由静止释放沿磁棒下落,经一段时间与水平面发生弹性碰撞并反弹,线圈反弹速度减小到零后又沿磁棒下落,这样线圈会不断地与水平面相碰下去,直到停留在水平面上.已知第1次碰后反弹上升的时间为 t_1 ,下落的时间为 t_2 ,重力加速度为 g ,不计线圈中电流产生磁场的影响.求:

- (1) 线圈第1次下落过程中的最大速度 v_m ;
- (2) 第1次与水平面碰后上升到最高点的过程中通过线圈某一截面的电荷量 q ;
- (3) 第2次落地时的速度.

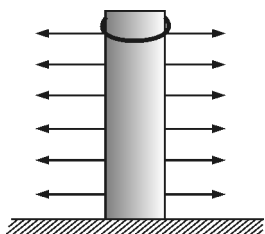


图1 例1题图

解析:(1) 线圈在重力作用下加速运动,受到的安培力为阻力,而且逐渐增大,可知线圈做加速度减小的加速运动,当加速度为零时,即安培力与重力达到平衡时,速度最大.由于磁棒很长,则线圈第1次下落过程中可以达到最大速度,达到最大速度后将匀速下落.在线圈第1次下落过程中,垂直切割磁感线导体的等效长度 $l=2\pi r$,感应电动势 $\epsilon=Blv$,感应电流 $I=\frac{\epsilon}{R}$,安培力 $F_A=BIl$.当二力平衡时 $F_A=mg$,解得 $v_m=\frac{mgR}{4\pi^2 B^2 r^2}$.

(2) 线圈落地时的速度为 v_m ,由于不计碰撞过程中的机械能损失,则反弹速度大小也为 v_m ,上升到最高点时的速度为零.设线圈第1次与水平面碰后上升到最高点的过程中通过某一截面的电荷量为 q ,将线圈的各小段视为直导线,再累加,则整个线圈受到安培力的冲量为 $\overline{F}\Delta t=BI\Delta t=Blq$,重力的冲量为 $mg t_1$,由动量定理有

$$Blq + mg t_1 = mv_m - 0$$

解得

$$q = \frac{m^2 g R}{8\pi^3 B^3 r^3} - \frac{m g t_1}{2\pi B r}$$

(3) 从第1次上升到第2次落地的整个过程中,由于线圈的位移为零,则安培力的冲量 $\overline{F_A}t=kx$ 为零,以竖直向下为正方向,由动量定理有

$$mg(t_1 + t_2) = mv - m(-v_m)$$

可得

$$v = g(t_1 + t_2) - v_m$$

点评:解题关键是利用微元累加法来求圆形线圈受到安培力的冲量,而且用到了两个安培力的冲量公式.

【例2】(2014年安徽二模)如图2所示,在光滑绝缘水平桌面上,有一直径为 L 的圆形线圈,空间有竖直向下的有界匀强磁场,宽度为 $2L$,线圈以垂直于磁场边界的初速度 v_0 进入磁场且最终离开.则线圈在进入磁场和离开磁场的过程中,下列说法正确的是()

- A. 线圈中产生的感应电流方向相同
- B. 线圈速度的变化量相同
- C. 线圈受到的安培力方向相反
- D. 线圈中产生的热量相等

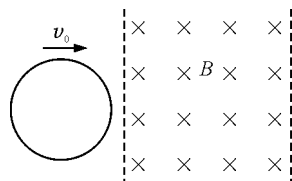


图2 例2题图

解析:由于线圈进入磁场时磁通量增加,离开磁场时磁通量减少,因此感应电流方向相反,选项A错误.线圈先后受到的安培力始终为阻力,则方向相同,选项C错误.

线圈进入磁场过程中,速度较大,电流较大,受到的安培力较大;而线圈离开磁场过程中,速度较小,电流较小,受到的安培力较小.但发生的位移相同,因此两个过程中克服安培力做的功不同,则产生的热量不相等.选项D错误.只有选项B正确.

对于单匝线圈,由 $q=\frac{\Delta\Phi}{R}$ 可知,由于穿过线圈的磁通量相同,因此通过线圈的电荷量相同.

假设线圈为矩形线圈,左右两边长度为 L ,由动量定理有

$$BLq = mv_0 - mv_1$$

对于线圈穿出磁场过程,由动量定理有

$$BLq = mv_1 - mv_2$$

可知两个过程中的动量变化量相同,因此速度变化量相同.

对于圆形线圈,切割磁感线导体的等效长度不断变化,则安培力的冲量 Bql 是变化的,但在两个过程中的 l 都是从零增大到 L ,再减小到零,而 Bql 中不含有其他变量,只有 l 一个变量,最小值是零,最大值是 L ,那么 l 的平均值不是对位移平均,也不是对时间平均,而是对自己各值取平均,由于线圈在进入磁场和离开磁场的两个过程中,切割磁感线导体的长度变化是一致的,是相同的,则平均值是相同的,因此在两个过程中安培力的冲量相同,所以动量的变化量相同,则速度的变化量相同.故选项 B 正确.

点评: 解题关键是对圆形线圈进入磁场和离开磁场两个过程中受到安培力冲量大小的比较,方法很巧妙.

【例 3】 如图 3 所示,一根电阻 $R=6\ \Omega$ 的导线弯成一根圆形线圈,圆半径 $r=1\ \text{m}$,线圈质量 $m=0.1\ \text{kg}$,此线圈放在绝缘光滑的水平面上.在 y 轴右侧有垂直于线圈平面的匀强磁场,磁感应强度大小 $B=0.5\ \text{T}$.若线圈以初速度 $v_0=10\ \text{m/s}$ 沿 x 轴方向滑进磁场,当线圈恰有一半进入磁场时,求此时线圈的瞬时速度以及圆环内产生的焦耳热.

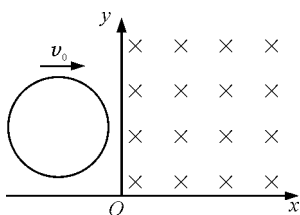


图 3 例 3 题图

解析: 如图 4 所示,当线圈进入磁场中的距离为 x 时,设磁场边界在圆中的弦长为 l ,由相交弦定理可知 $\left(\frac{l}{2}\right)^2 = x(2r-x)$,因此切割磁感线导体的等效长度 $l=2\sqrt{x(2r-x)}$.那么当线圈在磁场中的位移微元为 Δx 时,线圈受到安培力的冲量微元

$$\Delta I = \frac{B^2 l_i^2}{R} \Delta x$$

进行积分可得全过程中安培力的冲量

$$I = \int_0^r \frac{B^2 l^2}{R} dx$$

由于 $l^2 = 4x(2r-x) = -4x^2 + 8rx$,则

$$I = \frac{B^2}{R} \int_0^r l^2 dx =$$

$$\frac{B^2}{R} \left(-\frac{4}{3}x^3 + \frac{8}{2}rx^2 \right) \Big|_0^r = \frac{8B^2}{3R}r^3$$

由动量定理有 $I = mv_0 - mv$,可得线圈有一半进入磁场时的速度为

$$v = v_0 - \frac{I}{m} = v_0 - \frac{8B^2}{3mR}r^3 = \frac{80}{9}\ \text{m/s}$$

由能量守恒定律可知,焦耳热为

$$Q = \frac{1}{2}m(v_0^2 - v^2) \approx 0.0105\ \text{J}$$

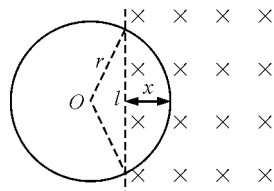


图 4 线圈进入磁场 x 时的示意图

点评: 解题关键是对圆形线圈利用微积分来求安培力的冲量,即先用微元法表示安培力的冲量,然后再取积分.由于该题在常规解法中涉及到微积分运算,因此常见一些改编的错题,即在题中给出电荷量或焦耳热的数值,以避免微积分运算,但却容易导致数据不自洽,这是值得注意的.可作出图像如图 5 所示,利用抛物线与横轴之间面积的结论来计算 $x=r$ 时对应抛物线与横轴之间的面积.

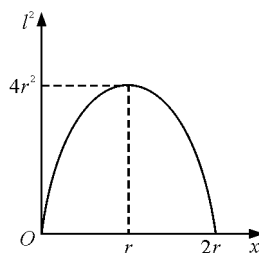


图 5 l^2-x 图像

综上所述,对于某些有关圆形线圈穿越磁场而引发电磁感应的疑难问题,利用安培力的冲量公式和动量定理解答,不仅拓展了思路,而且降低了难度.但在分析安培力的冲量时,要注意圆形线圈在匀强磁场中的等效长度是变化的.

参考文献

- 徐正恒. 由感应电荷巧解电磁感应问题. 物理通报, 2011(2):28~30
- 沈锋. 高中物理电磁感应命题失误分析. 物理通报, 2011(6):75~76,97