探究方波电场对带电粒子做功问题的解法

郑　金

（凌源市职教中心　辽宁 朝阳　122500）

（收稿日期：2016－12－07）

摘　要：对有关带电粒子沿垂直于电场方向进入方波电场中的运动问题进行分析，探究 3 种不同形式的方波电场对带电粒子做功的计算方法.

关键词：方波电场　做功　图像面积　动能定理

对于带电粒子在方波交变电场中的运动，有时虽然位移不为零，但电场力做功可能为零；有时虽然位移为零，但电场力做功可能不为零. 利用运动学公式和牛顿第二定律可以证明，当物体在恒力作用下沿曲线运动时，可在两个相互垂直的方向上分别应用动能定理，由此解答有关方波交变电场做功问题可化繁为简.

1　对称方波电场

【例 1】如图 1 所示，平行板电容器两极板相距 0.1 m，加在两极板上的电压如图 2 所示，当 $t=0$ 时，电子从两极板中央平行于极板射入匀强电场中，刚好从极板边缘飞出，求：(1) 电子在进入电场 1×10^{-8} s 时偏离 OO' 中线多远？(2) 电子通过电场过程中动能增加多少？（电子的比荷为 1.76×10^{-11} C/kg，质量 9.1×10^{-31} kg）

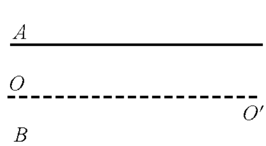

图 1　平行板电容器

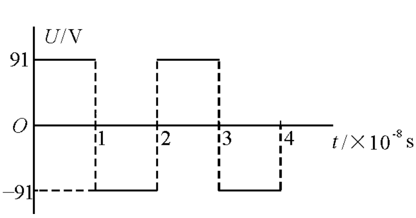

图 2　对称方波形电压

解析：(1) 电子在垂直于极板方向做初速度为零的匀加速运动，加速度为

$$a=\frac{F}{m}=\frac{eU_0}{md}=1.6\times10^{14}\ \mathrm{m/s^2}$$

由于经历的时间 $t=1\times10^{-8}$ s 为半个周期，所以电子发生的侧向位移为

$$y=\frac{1}{2}at^2=8\times10^{-3}\ \mathrm{m}$$

(2) 在垂直于极板方向，电子一直向正极板运动，即先做初速度为零的匀加速运动，再匀减速运动，而且加速度大小相同，当速度达到零时，经历一个周期；然后重复上述过程. 电子在平行于极板方向做匀速直线运动，那么在一个周期时间内，电子的动能先增加再减少到初始值.

由于电子刚好从极板边缘飞出，则最大侧向位移为 $H=\dfrac{d}{2}=0.05$ m，可知电子通过电场经历的时间跟半周期的倍数关系为 $n=\left[\dfrac{H}{y}\right]=[6.25]=6$. 因此当电子运动经历 3 个周期时，即在 6×10^{-8} s 末，侧向速度变为零. 由于电子在电场方向的分运动是单向的，则位移一直增加，所以在 3 个周期内的侧向位移为

$$y'=6y=6\times8\times10^{-3}\ \mathrm{m}=0.048\ \mathrm{m}$$

在周期的整数倍时间内，虽然侧向位移不为零，但电场力做的功为零，因此对电子的动能无影响，那么动能的变化只由从开始运动经历最大整数倍周期之后剩余时间内的位移决定. 此时电子到正极板的距离为 $h=0.002$ m，而且处于电压变化的正半周，将加速运动，由动能定理可知电子增加的动能为

$$\Delta E_k=qU'=eU\frac{h}{d}=1.82\ \mathrm{eV}$$

计算距离 h 还有一种方法：电子通过电场的侧

向位移与半周期内的侧向位移的倍数关系为

$$n=\frac{H}{y}=6.25$$

可知电子经历3个周期后到正极板的距离为$h=0.25y=0.002$ m.但电子通过侧向位移$h=0.002$ m所经历的时间并非$0.25t=0.125\times10^{-8}$ s,而是0.5×10^{-8} s.

点评:解题关键是计算电子通过电场所用的时间是多少个周期,电子在经历整数个周期时到最近极板的距离,以及电子离开电场时处于一个周期中的什么时刻.如果直接计算电子的动能比较麻烦,而应用动能定理和电功公式间接计算动能则很简单.

2　非对称方波电场

【例2】如图1所示,平行金属板A和B间的距离为d,现在A和B板加上如图3所示的方波形电压,当$t=0$时,A板的电势比B板高,电压的正向值与反向值均为U_0.现有由质量为m、电荷量为q的带正电的粒子组成粒子束,从AB的中点O处以速度v_0沿平行于金属板方向的直线OO'的方向射入,所有粒子在AB间的飞行时间均为T,不计重力的影响.求电场力对每个击中O'的粒子做的总功.

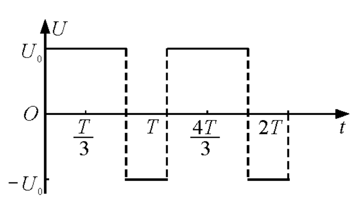

图3　时间非对称方波形电压

解析:粒子在OO'方向不受力,做匀速直线运动,而初速度一定,金属板长度一定,则在AB间的飞行时间一定,初速度和长度选取一定的数值可使飞行时间为T,等于交变电场的一个周期.

在电场力方向上,初速度为零,飞出电场时的速度为v_y,由动量定理有$FT=mv_y$.画出电场力的图像如图4所示,由图像可知,无论时间起点如何,在任意一个周期内,图像与t轴围成的面积总为正值而且相等,表示冲量的大小,由动量定理有

$$S=F_0\frac{T}{3}=mv_y$$

而

$$F_0=\frac{qU_0}{d}$$

所以$v_y=\frac{qU_0T}{3dm}$为恒量,表明所有粒子经历一个周期离开电场时的横向速度大小相等.因此在粒子通过电场的过程中,电场力对每个击中O'的粒子做的功相同,在电场力方向上由动能定理有

$$W_y=\frac{1}{2}mv_y^2$$

所以电场力做的总功为

$$W=\frac{(qU_0T)^2}{18d^2m}$$

点评:解题关键是画出力随时间变化的图像,利用图像面积应用动量定理求出电场方向的分速度为恒量.如果分段计算功将很麻烦,而对全过程应用动能定理、在某一方向上应用动能定理则非常简单.

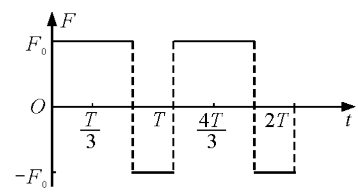

图4　电场力图像

拓展:对于例题2,若方波形电压如图5所示,其他条件不变,求:(1)若粒子在交变电压的正半周进入电场,则击中O'点的粒子进入电场的时刻为何?(2)电场力对每个击中O'点的粒子做的功是多少?

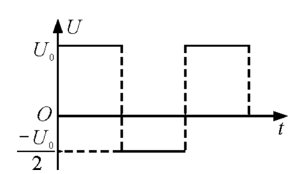

图5　峰值非对称方波形电压

解析:(1)粒子在电压正半周运动的加速度为$a_1=\frac{qU_0}{dm}$,在电压负半周运动的加速度大小为$a_2=\frac{qU_0}{2dm}$.由于击中O'点的粒子侧向位移为零,则速度图像的面积为零.若粒子在交变电压的正半周进入电场,则在一个周期内的侧向速度图像如图6所示.

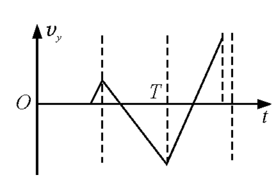

图6　一个周期内的侧向速度图像

设在第一个正半周匀加速直线运动的时间为$t_1=\Delta t$,则在负半周整个匀减速直线运动的时间为$t_2=\frac{T}{2}$,在第二个正半周整个匀加速直线运动的时间为

$t_3=\frac{T}{2}-\Delta t$. 以加速度 a_1 方向为正方向，由速度公式可知两个转折点的速度分别为

$$v_1=a_1\Delta t$$

$$v_2=v_1-a_2\ \frac{T}{2}=a_1\Delta t-a_1\ \frac{T}{4}$$

由位移公式可知各段时间内的位移分别为

$$s_1=\frac{1}{2}a_1\Delta t^2$$

$$s_2=v_1\ \frac{T}{2}-\frac{1}{2}a_2\left(\frac{T}{2}\right)^2=$$

$$a_1\Delta t\ \frac{T}{2}-\frac{1}{4}a_1\left(\frac{T}{2}\right)^2$$

$$s_3=v_2\left(\frac{T}{2}-\Delta t\right)+\frac{1}{2}a_1\left(\frac{T}{2}-\Delta t\right)^2=$$

$$a_1\left(\frac{T}{2}-\Delta t\right)\frac{\Delta t}{2}$$

而侧向总位移为零，即

$$s=s_1+s_2+s_3=0$$

解方程代入数据得 $\Delta t=\frac{T}{12}$，因此进入电场的时刻为

$$t=\frac{T}{2}-\frac{T}{12}=\frac{5T}{12}$$

所以，只有粒子在 $kT+\frac{5T}{12}(k=0,1,2,3,\cdots)$ 时刻进入电场才可到达 O' 点.

利用电场力图像的面积和动量定理可知，无论方波电压特点如何，只要粒子沿垂直于电场方向进入电场运动一个周期，末速度就相同. 由此可知，若粒子在电压的负半周进入电场，则侧向速度图像如图 7 所示，易知粒子在第一个负半周运动的时间为

$$\Delta t=\frac{7T}{12}$$

所以只有在 $kT+\frac{7T}{12}(k=0,1,2,3,\cdots)$ 时刻进入的才可到达 O' 点.

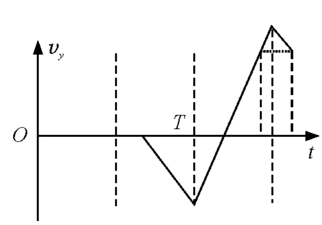

图 7　粒子在电压的负半周进入电场时的侧向速度图像

(2) 由于粒子受到的电场力与位移在同一直线上，则电场力在各段位移上做的功等于力与位移之积. 由于 F_3 与 F_1 同向，而且大小相等，F_2 与 F_1 反向，则

$$F_2=-\frac{1}{2}F_1$$

那么电场力做的功为

$$W=F_1s_1+F_2s_2+F_1s_3=$$

$$F_1(s_1+s_3)-\frac{1}{2}F_1s_2=$$

$$F_1\left(s_1+s_3-\frac{1}{2}s_2\right)=ma_1\left(-\frac{3}{2}s_2\right)$$

由于 $s_2=a_1\ \frac{T^2}{24}-\frac{1}{4}a_1\ \frac{T^2}{4}=-a_1\ \frac{T^2}{48}$，所以

$$W=\frac{(qv_0T)^2}{32d^2m}$$

还可应用动能定理进行解答. 由图 6 可知，第三段倾斜直线对应的整个匀加速运动的时间为

$$t=\frac{5T}{12}$$

由速公式可知粒子在电场方向的末速度为

$$v_3=v_2+a_1t=\frac{qU_0}{4dm}T$$

在电场力方向应用动能定理得

$$W=\frac{1}{2}mv_3^2=\frac{(qv_0T)^2}{32d^2m}$$

若粒子从电压的负半周进入电场，则电场力做的功相等.

点评：在分段计算功时，由于各段位移已经是矢量，那么就应考虑各力的矢量性，以正半周的力方向为正，则负半周的力方向为负，故取负值. 还可分别判断正、负号，3 个力分别是正、负、正，而 3 个位移分别是正、负、正，因此 3 个功都是正的. 虽然总位移为零，但电场力做的功不为零，原因是这种方波电场并非恒定电场，或者说电场力不是恒力，不能对整个过程应用功的公式 $W=Fs$ 或 $W=qU$.

总之，对于带电粒子的整个运动过程，在电场力方向上应用动能定理求功或动能的变化量最简单.

参 考 文 献

1　郑金. 动能定理的分解式及应用. 理科考试研究，2010(1)：23 ～ 25

2　刘占想，杨泽卿. 带电粒子在交变电场中的偏转问题. 中学物理，1999，17(1)：31 ～ 32

3　王绍华. 位移为零，做功为零吗？中学物理，1999，17(6)：44 ～ 45