关于平面简谐波波函数相位问题的研究

张　勇

[武汉晴川学院(原武汉大学珞珈学院)公共课部　湖北 武汉　430000]

(收稿日期:2016-12-20)

摘　要:分析了两类波函数的等价性,讨论了求波函数初相的 3 类误区.

关键词:波函数　相位　平面简谐波

1　波函数推导过程中的相位问题

1.1　两类波函数的推导

若已知某列平面简谐波以速度 u 往 x 轴正方向传播,且坐标原点 O 的振动方程为

$$y(t)=A\cos(\omega t+\varphi_0)$$

则用时间推迟法可得到此波的波函数为

$$y(x,t)=A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)+\varphi_0\right]$$

用相位插入法可得到此波的波函数为

$$y(x,t)=A\cos(\omega t-kx+\varphi_0)$$

其中 k 为波数,满足

$$k=\frac{2\pi}{\lambda}$$

1.2　两类波函数的等价性

从相位的角度来说,两类波函数是等价的. 因为一方面 $\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)$ 的中的 ωt 得到的是角度,对应的量纲为 rad,而 $\omega\left(\frac{x}{u}\right)$ 实际上是 $\omega\Delta t$,得到的也是角度,对应的量纲也为 rad,所以整个 $\left[\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)+\varphi_0\right]$ 得到的都是 rad;另一方面 $(\omega t-kx)$ 中的 kx 对应的量纲也是 rad,也就是说整个 $(\omega t-kx+\varphi_0)$ 得到的也都是 rad. 所以从相位的量纲角度来说,两类波函数是等价的. 从计算角度来说,也可以得到波函数的等价性. 因为

$$\frac{\omega}{u}=k=\frac{2\pi}{\lambda}$$

2　波函数求解过程中的相位问题

2.1　求波函数的初相的 3 类误区

误区一:从波形图中斜率的正负来判断质点的振动速度的正负

【例 1】 如图 1 所示,已知一列平面简谐波在 $t=0$ 时刻的波形图,且已知该波向右以 $u=1$ m/s 速度传播,求波函数[1].

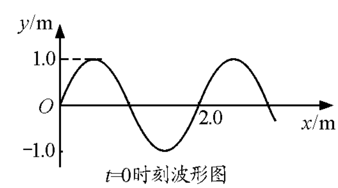

图 1　例 1 题图

错解:从图中很容易知道波的相关参数,可设该波的波函数为

$$y(x,t)=\cos[\pi(t-x)+\varphi_0]$$

求解初相位成为此问题的关键. 用旋转矢量法求初相需要判断 O 点的振动速度方向. 有的学生想起简谐振动图 $x-t$ 中的斜率代表速度的正负,于是判断出 O 点的斜率为正,所以 O 点的速度为正,从而求出初相位 $\frac{3\pi}{2}$.

分析:造成错解的原因是该同学混淆了 $x-t$ 图斜率和 $y-x$ 图斜率的含义. 前者的斜率是 $k=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$,代表的是速度,而后者的斜率是 $k=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$,代表的是质元的形变程度[2]. 也就是说,在波形图中判断某质点的

作者简介:张勇(1984-),男,讲师,主要从事大学物理的教学与研究.

振动方向不能看该点的斜率，而要另择它法. 用波形微平移法容易判断出来 O 点应该向下振动，方向为负，对应的初相位为 $\frac{\pi}{2}$.

误区二： 容易误认为初相位就是 O 点的相位（还必须是 $t=0$ 时刻）.

【例 2】 如图 2 所示，已知一列平面简谐波在 $t=1$ s 时刻的波形图，且已知该波向右以 $u=1$ m/s 速度传播，求波函数.

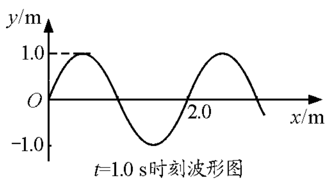

图 2　例 2 题图

错解： 从图中很容易知道波的相关参数，可设该波的波函数为

$$y(x,t)=\cos[\pi(t-x)+\varphi_0]$$

求解初相位成为此问题的关键. 用旋转矢量法求初相需要判断 O 点的振动速度方向. 用波形微平移法知 O 点向下振动，所以 O 点的速度为负，从而求出初相位 $\frac{\pi}{2}$.

分析： 造成错解的原因是该同学误认为初相就是 O 点的相位而不知道还应该在零时刻. 正确做法是：把波形向左平移 $\frac{\lambda}{2}$，得到 $t=0$ 时刻的波形图，则 $t=0$ 时 O 点应该向上振动，方向为正，对应的初相位为 $\frac{3\pi}{2}$.

误区三： 容易误认为初相位就是 0 时刻 O 点的相位（可能 O 点不是 $x=0$ 的质点）

【例 3】 已知一列平面简谐波向右以 $u=1$ m/s 速度传播，已知 $x=0.5$ m 处质点的振动 $x-t$ 图如图 3 所示，求波函数.

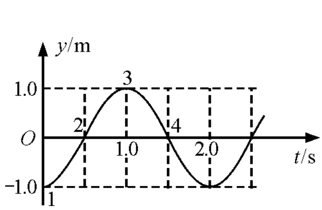

图 3　例 3 题图

错解： 从图中很容易知道波的相关参数，可设该波的波函数为

$$y(x,t)=\cos[\pi(t-x)+\varphi_0]$$

求解初相位成为此问题的关键. 从图中容易判断 O 点在负的最大位移处. 用旋转矢量法求出初相位 π.

分析： 造成错解的原因是该同学误认为初相就是 O 点的相位而不知道还应该必须是 $x=0$ 处的质元. 用波形还原法不难判断出来 $x=0$ 处质元在 $t=0$ 时刻在平衡位置且应该向上振动，对应的初相位为 $\frac{3\pi}{2}$.

2.2　求以某点为坐标原点的波函数的相位问题

2.2.1　从相位差的角度理解 3 个波函数的等价性

【例 4】 如图 4 所示，某列平面简谐波以速度 u 往 x 轴正向传播，波线上 A，B，C 3 点之间的距离均为 d，且已知 A 点的振动方程为

$$y_A(t)=A\cos(\omega t+\varphi_0)$$

分别求以 A，B，C 为坐标原点的波函数并说明其等价性.

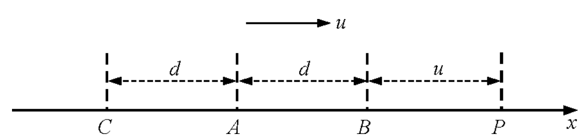

图 4　例 4 题图

解答： 先求波函数. 用时间替换法很快可写出以 A 为坐标原点的波函数为

$$y_A(x,t)=A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)+\varphi_0\right]$$

先求出 B 点的振动方程

$$y_B(t)=A\cos(\varphi_B)$$

然后再求以 B 为原点的波函数. B 点的相位可由以下方法得到. AB 两点的相位差为

$$\Delta\varphi_{AB}=\varphi_A-\varphi_B$$

同时

$$\Delta\varphi_{AB}=k\Delta x=\frac{2\pi}{\lambda}d$$

且已知

$$\varphi_A=\omega t+\varphi_0$$

联立可得

$$\varphi_B=\varphi_A-\Delta\varphi_{AB}=(\omega t+\varphi_0)-\frac{2\pi}{\lambda}d$$

故以 B 为坐标原点的波函数为

$$y_B(x,t)=A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)+\varphi_0-\frac{2\pi}{\lambda}d\right]$$

同理，可得到以 C 为坐标原点的波函数为

刚体转动方程的矢量式

—— 兼谈其与质点动力学的“内在统一性”

黄亦斌　曾建平
（江西师范大学物理与通信电子学院　江西 南昌　330022）
彭荣荣
（南昌工学院　江西 南昌　330022）

（收稿日期：2017－01－09）

摘　要：就刚体动力学中角动量公式和转动方程进行了分析，指出转动惯量张量不是常量，得到了相关的矢量式，并分析了一些对公式 $L = J\omega$ 和 $M = J\beta$ 的常见误解.

关键词：刚体动力学　定轴转动　转动惯量　矢量式

1　缘起

本刊 2016 年第 10 期刊文“刚体与质点动力学关系的内在统一性”[1]，把刚体力学与质点力学的相似性上升到某种理论高度. 该文的一些理解是正确的，如“牛顿第二定律和转动定理所描述的都是在外因作用下，适用对象运动状态的变化与外因量之间的关系”，两套力学之间确有一定的相似性和平行

$$y_C(x,t) = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi_0 + \frac{2\pi}{\lambda}d\right]$$

再说明 3 个波函数的等价性. 比较 3 个波函数发现，它们形式上大体相同，只不过，B 比 A 的相位角少了 $\frac{2\pi}{\lambda}d$，C 比 A 的相位角多了 $\frac{2\pi}{\lambda}d$. 这个区别是不难理解的：因为此波是往正向传播，C 点在 A 点左边，所以会比 A 点的相位要超前 kd，即 CA 的相位差为 kd；B 点在 A 点右边，所以会比 A 点的相位要落后 kd，即 AB 的相位差为 kd. 这个相位差在波函数的形式上体现出来，就是 B 的波函数相位角要比 A 的少 kd，而 C 的要比 A 多 kd，但他们描述的其实是同一列平面简谐波.

2.2.2　从表示某点的振动方程角度理解 3 个波函数的等价性

我们知道当波函数中 x 变量一定时，波函数转化为质点的振动方程. 下面用 3 个波函数来描写波线上 P 点的振动方程. 如果以 A 为坐标原点，则 P 点的坐标为 $x_P = u + d$，代入 A 的波函数得到 P 点的振动方程为

$$y_P(t) = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{u+d}{u}\right) + \varphi_0\right] =$$
$$A\cos\left[\omega(t-1) - \frac{\omega d}{u} + \varphi_0\right]$$

如果以 B 为坐标原点，则 P 点的坐标为 $x_{P1} = u$，代入 B 的波函数得到 P 点的振动方程为

$$y_{P1}(t) = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{u}{u}\right) + \varphi_0 - \frac{2\pi}{\lambda}d\right] =$$
$$A\cos\left[\omega(t-1) - \frac{\omega d}{u} + \varphi_0\right]$$

如果以 C 为坐标原点，则 P 点的坐标为

$$x_{P2} = u + 2d$$

代入 C 的波函数得到 P 点的振动方程为

$$y_{P2}(t) = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{u+2d}{u}\right) + \varphi_0 + \frac{2\pi}{\lambda}d\right] =$$
$$A\cos\left[\omega(t-1) - \frac{\omega d}{u} + \varphi_0\right]$$

比较发现 $y_P(t)$，$y_{P1}(t)$ 和 $y_{P2}(t)$ 实际上是一样的. 也就是说，从表示某点的振动方程的角度，间接说明 3 个波函数实际上是等价的.

参 考 文 献

1　马文蔚，等. 物理学(下册). 北京：高等教育出版社，2006. 48 ～ 54

2　夏峥嵘，等. 关于驻波的直观教学. 大学物理，2012(12)：42 ～ 44