物理问题研究

求小振动周期应注意的一个近似处理

朱远稼　　李　力

（重庆市清华中学　重庆　400054）

（收稿日期：2017－01－08）

计算力学体系小振动的周期，是物理竞赛中常见的问题. 文献[1，2] 分别用动力学法和能量法讨论如下“可动悬点摆”的周期：如图 1 所示，质量为 m 的小环套在固定水平光滑杆上，小环又通过长为 l 的轻绳与质量为 M 的小球连接，证明此体系在小角度下的运动是谐运动，并求其周期.

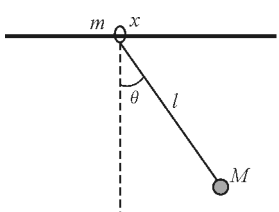

图 1

更简捷、更程序化的推导方法是用分析力学的拉格朗日方程[3] 求解：设广义坐标为 m 沿水平杆运动的坐标 x 和 M 摆动的角度 θ，则

$$x_M = x + l\sin\theta$$

$$y_M = l\cos\theta$$

求得体系的动能为

$$T = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{M}{2}(\dot{x}_M^2 + \dot{y}_M^2) =$$

$$\frac{m+M}{2}\dot{x}^2 + \frac{M}{2}l^2\dot{\theta}^2 + Ml\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta$$

以水平杆为势能零平面，则体系势能为

$$V = -Mgl\cos\theta$$

所以体系的拉格朗日函数为

$$L = T - V =$$

$$\frac{m+M}{2}\dot{x}^2 + \frac{M}{2}l^2\dot{\theta}^2 + Ml\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + Mgl\cos\theta$$

代入拉格朗日方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

积为 S 的锥形，则山体的整体质量 m_1 为

$$m_1 = \frac{1}{3}HS\rho \qquad (6)$$

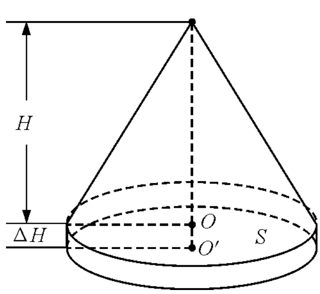

图 1　山体的锥形架构

山基被熔化的那部分物质的质量 m_2 为

$$m_2 = \Delta HS\rho \qquad (7)$$

若山体整体下降 ΔH 时重力势能的减少恰好等于山脚下厚度为 ΔH 的山基物质熔化所需要的能量，则有

$$m_2 L = m_1 g\Delta H \qquad (8)$$

由式(2)、(3)、(6)、(7) 和(8) 可得，半径为 R 的星体上的山体的高度的上限为

$$H = \frac{9L}{4\pi G\rho R} \qquad (9)$$

故该星球上的山体的高度应该满足

$$H \leqslant \frac{9L}{4\pi G\rho R} \qquad (10)$$

比较(5)、(10) 两式，可以发现：锥形山体模型的极限高度是柱形山体模型极限高度的 3 倍.

3　结束语

由于山体的宏观外形都是锥形的，以锥形对山体建模，是符合实际的. 鉴于科学性是命制试题的首要标准，笔者借助贵刊建议命题人，在命制新型试题时，一定要尽可能从实际出发，多方论证，尽量让物理建模与实际情况相吻合.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \theta}=0$$

整理得

$$(m+M)\ddot{x}+Ml(\ddot{\theta}\cos\theta-\dot{\theta}^2\sin\theta)=0$$

$$l\ddot{\theta}+\ddot{x}\cos\theta+g\sin\theta=0$$

消去 $\ddot{x}$，有

$$\ddot{\theta}[(m+M)l-Ml\cos^2\theta]+$$

$$\dot{\theta}^2(Ml\cos\theta\sin\theta)+(m+M)g\sin\theta=0 \qquad (1)$$

文献[4]也推出了式(1)，遗憾的是该文作者认为“上述微分方程求解甚难，…… 也没有结论. 但是将它和单摆的运动微分方程 $ml\ddot{\theta}+mg\sin\theta=0$ 对比，发现该方程明显多一平方项 $\dot{\theta}^2$，二者的解肯定没有可比性和相似性”.

其实，上述判断是错误的. 因为在小振动情况下，θ 和 $\dot{\theta}$ 皆为小量，在泰勒级数展开式[5]

$$\sin\theta=\theta-\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^5}{5!}-\cdots+\frac{(-1)^n\theta^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots$$

$$\cos\theta=1-\frac{\theta^2}{2!}+\frac{\theta^4}{4!}-\cdots+\frac{(-1)^n\theta^{2n}}{(2n)!}+\cdots$$

中略去高阶小量，最终只保留 θ，$\dot{\theta}$ 的一阶项，即作近似 $\sin\theta\approx\theta$，$\cos\theta\approx 1$，$\dot{\theta}^2\approx 0$，则式(1) 化简为

$$ml\ddot{\theta}+(m+M)g\theta=0$$

推得

$$\ddot{\theta}+\frac{(m+M)g}{ml}\theta=0 \qquad (2)$$

式(2) 表明小角度下体系做谐运动，且周期 $T=2\pi\sqrt{\dfrac{ml}{(m+M)g}}$，与文献[1,2] 的结果一致.

在小角度条件下简化微分方程的这个近似处理用得很多，例如文献[6] 研究的竞赛题.

如图 2 所示，一个质量为 M 的槽放在水平光滑地面上，一个质量为 m，摆长为 l 的摆球放在槽内带动槽在水平面内小角度振动，球直径恰等于槽左右壁距离，且摆球在最低点时也不和槽底接触，槽内壁光滑，求这个系统的振动周期.

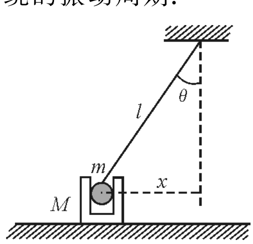

图 2　竞赛题题图

文献[6] 用了 4 种方法，下面我们另用拉格朗日方程求解：设广义坐标为 θ，则

$$x=l\sin\theta \quad \dot{x}=l\dot{\theta}\cos\theta$$

体系动能

$$T=\frac{M}{2}\dot{x}^2+\frac{m}{2}l^2\dot{\theta}^2=\frac{l^2}{2}(M\cos^2\theta+m)\dot{\theta}^2$$

势能　　$V=-mgl\cos\theta$

拉氏函数

$$L=T-V=\frac{l^2}{2}(M\cos^2\theta+m)\dot{\theta}^2+mgl\cos\theta$$

代入拉氏方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \theta}=0$$

整理后有

$$l^2(M\cos^2\theta+m)\ddot{\theta}-Ml^2\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta+mgl\sin\theta=0$$

考虑小振动时 θ，$\dot{\theta}$ 皆为小量，仅保留它们的一阶项，即

$$\sin\theta\approx\theta \quad \cos\theta\approx 1 \quad \dot{\theta}^2\approx 0$$

微分方程可简化为

$$(M+m)l\ddot{\theta}+mg\theta=0$$

解得　　$T=2\pi\sqrt{\dfrac{(M+m)l}{mg}}$

同文献[6] 的结果是一致的.

从上述两个题目的研究可以发现，小角度条件下简化微分方程的这个近似处理很重要，同时也看到分析力学处理问题的优越性 —— 简捷而程序化. 当然，分析力学最重要的地方不在于此，而是对经典物理和近代物理提供统一的表达形式，它是通向量子力学、统计力学、量子场论等领域的必经之路.

参 考 文 献

1　韩娟，郑修林，李春梅. 探讨无固定悬挂点单摆的周期. 物理通报，2009(4)：2 ～ 5

2　李力. 用能量法简捷推导可动悬点单摆的谐运动周期. 物理通报，2012(9)：129

3　梁昆淼，原著，鞠国兴，施毅，修订. 力学(下册) 理论力学(第 4 版). 北京：高等教育出版社，2012. 61 ～ 65

4　熊志权. 物理原来不能这样考. 成都：西南交通大学出版社，2012. 51 ～ 52

5　《数学手册》编写组. 数学手册. 北京：人民教育出版社，1981. 226

6　柯尧. 赏析一道求振动周期的竞赛题的多种解法. 物理教师，2016(10)：92 ～ 93