考试与评价研究

分析山体理论高度建议运用锥形建模*

——兼谈第 33 届全国中学生物理竞赛预赛卷第 12 题

张怀华

(焦作市第十一中学　河南 焦作　454000)

(收稿日期:2017-01-13)

摘　要:通过对第 33 届全国中学生物理竞赛预赛试卷第 12 题及其参考答案的分析,指出了对山体柱形建模的瑕疵,通过对山体进行锥形建模,发现山体的极限高度为柱形建模下山体极限高度的 3 倍.

关键词:熔化热　极限高度　山体　星体

自 2016 年 9 月 3 日第 33 届全国中学生物理竞赛预赛结束以来,很多师生对试卷第 12 题展开了激烈的争论,大家对试题中提供的山体的柱形建模方式表示质疑,笔者对山体以师生普遍认可的锥形进行建模,得出了新的结论.下面就从对山体锥形建模的角度,谈一谈对山体极限高度的分析与求解.

1　试题回放与参考解析

【题目】固体星球可近似看作半径为 R(足够大)的球形均匀的固体,构成星球的物质的密度为 ρ,引力常量为 G.考虑星球表面山体的高度,如果山高超出某一限度,山基便会发生流动(可以认为是山基部分物质熔化的结果,相当于超出山的最高限度的那块物质从山顶移走了),从而使山的高度减低.山在这种情况下,其高度的小幅降低可视为小块质量的物质从山顶移到山底.假设小块物质重力势能的减少与其完全熔化所需要的能量相当,山体由同种物质构成,该物质的熔化热为 L,不考虑温度升到熔点所需的能量,也不考虑压强对固体熔化热的影响,试估算在此条件下由同一种物质构成的山体高度的上限.

参考答案:由于星体是均匀的球体,且山体的高度远小于球体的半径,按照题设模型有

$$mgH_{\max}=mL \tag{1}$$

式中 $H_{\max}$ 是山体高度的上限,m 是会熔化掉的那一小块物质的质量.

在星球表面,由引力产生的加速度为

$$g=\frac{GM}{R^2} \tag{2}$$

式中 M 是星体的质量.

根据本题对星体的球形假设,有

$$M=\frac{4}{3}\pi R^3\rho \tag{3}$$

由以上式(1)、(2) 和(3) 可得,半径为 R 的星体上的山体的高度的上限为

$$H_{\max}=\frac{3L}{4\pi G\rho R} \tag{4}$$

故该星球上的山体的高度应该满足

$$H\leqslant\frac{3L}{4\pi G\rho R} \tag{5}$$

2　锥形建模条件下山体极限高度的分析与求解

上述分析看似合理,但是笔者不能苟同.在本试题的命制中,山体是按照柱形建模的,这与实际中的山体不相符,因为从宏观角度看,绝大多数山体都是锥形的.

如图 1 所示,如果将山体抽象为高度为 H,底面

* 2016 年河南省基础教育教学重点研究项目"基于核心素养的高中物理教学目标的构建及实施研究",项目编号:JCJYB16060032,本文为该项目的研究成果.

积为 S 的锥形，则山体的整体质量 m_1 为

$$m_1 = \frac{1}{3}HS\rho \tag{6}$$

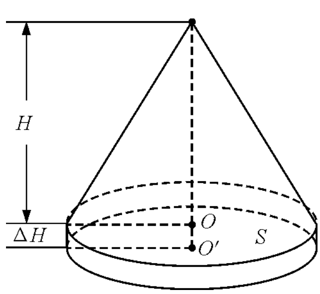

图 1　山体的锥形架构

山基被熔化的那部分物质的质量 m_2 为

$$m_2 = \Delta HS\rho \tag{7}$$

若山体整体下降 ΔH 时重力势能的减少恰好等于山脚下厚度为 ΔH 的山基物质熔化所需要的能量，则有

$$m_2 L = m_1 g \Delta H \tag{8}$$

由式(2)、(3)、(6)、(7) 和(8) 可得，半径为 R 的星体上的山体的高度的上限为

$$H = \frac{9L}{4\pi G\rho R} \tag{9}$$

故该星球上的山体的高度应该满足

$$H \leqslant \frac{9L}{4\pi G\rho R} \tag{10}$$

比较(5)、(10) 两式，可以发现：锥形山体模型的极限高度是柱形山体模型极限高度的 3 倍.

3　结束语

由于山体的宏观外形都是锥形的，以锥形对山体建模，是符合实际的. 鉴于科学性是命制试题的首要标准，笔者借助贵刊建议命题人，在命制新型试题时，一定要尽可能从实际出发，多方论证，尽量让物理建模与实际情况相吻合.

求小振动周期应注意的一个近似处理

朱远稼　李　力
（重庆市清华中学　重庆　400054）

（收稿日期：2017－01－08）

计算力学体系小振动的周期，是物理竞赛中常见的问题. 文献[1,2] 分别用动力学法和能量法讨论如下“可动悬点摆”的周期：如图 1 所示，质量为 m 的小环套在固定水平光滑杆上，小环又通过长为 l 的轻绳与质量为 M 的小球连接，证明此体系在小角度下的运动是谐运动，并求其周期.

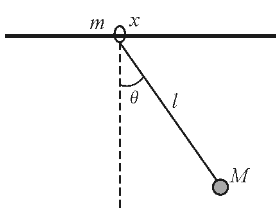

图 1

更简捷、更程序化的推导方法是用分析力学的拉格朗日方程[3] 求解：设广义坐标为 m 沿水平杆运动的坐标 x 和 M 摆动的角度 θ，则

$$x_M = x + l\sin\theta$$

$$y_M = l\cos\theta$$

求得体系的动能为

$$T = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{M}{2}(\dot{x}_M^2 + \dot{y}_M^2) =$$

$$\frac{m+M}{2}\dot{x}^2 + \frac{M}{2}l^2\dot{\theta}^2 + Ml\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta$$

以水平杆为势能零平面，则体系势能为

$$V = -Mgl\cos\theta$$

所以体系的拉格朗日函数为

$$L = T - V =$$

$$\frac{m+M}{2}\dot{x}^2 + \frac{M}{2}l^2\dot{\theta}^2 + Ml\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + Mgl\cos\theta$$

代入拉格朗日方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$