

# 轨迹圆与磁场圆等大时带电粒子运动模型分析

陈玺君

(丹阳市吕叔湘中学 江苏 镇江 212300;

广西师范大学物理科学与技术学院 广西 桂林 541004)

(收稿日期:2017-04-05)

**摘要:**研究了轨迹圆与磁场圆等大时带电粒子在圆形匀强磁场中的运动模型,得出了5个结论,并用结论分析了一道典例,对磁场的模型教学及学习起到了很好的优化作用.

**关键词:**  $v = \frac{qBR}{m}$  带电粒子 圆形匀强磁场 模型 结论

## 1 引言

带电粒子在匀强磁场中的运动在高考中历来是重点考查对象之一,对于学生来说往往学习困难很大,如带电粒子在圆形匀强磁场中的运动这一模型;而当中又有一类特殊的运动情况,当粒子的轨迹圆与磁场圆等大时,这时粒子的运动规律会很特殊,经常被用来作为挖掘的对象,衍生出很多新题,要使教学变得简单,学生学习变得轻松,模型学习很重要;为此,笔者将“ $v = \frac{qBR}{m}$ ”的带电粒子在圆形匀强磁场中运动模型的规律以结论的形式呈现出来,与读者分享.

## 2 问题场景

在磁场教学中教师经常让学生解决这样一个问题:

**【典例】**如图1(a)所示, $x$ 轴正方向水平向右, $y$ 轴正方向竖直向上.在 $xOy$ 平面内有与 $y$ 轴平行的匀强电场,在半径为 $R$ 的圆形区域内加有与 $xOy$ 平面垂直的匀强磁场.在坐标原点 $O$ 处放置一带电微粒发射装置,它可以连续不断地发射具有相同质量 $m$ ,电荷量 $q(q > 0)$ 和初速度为 $v_0$ 的带电粒子.已知重力加速度大小为 $g$ .

(1)当带电微粒发射装置连续不断地沿 $y$ 轴正方向发射这种带电微粒时,这些带电微粒将沿圆形磁场区域的水平直径方向离开磁场,并继续沿 $x$ 轴正方向运动.求电场强度和磁感应强度的大小和方

向.

(2)调节坐标原点 $O$ 处的带电微粒发射装置,使其在 $xOy$ 平面内不断地以相同速率 $v_0$ 沿不同方向将这种带电微粒射入第I象限,如图1(b)所示.现要求这些带电微粒最终都能平行于 $x$ 轴正方向运动,则在保证匀强电场、匀强磁场的强度及方向不变的条件,应如何改变匀强磁场的分布区域?并求出符合条件的磁场区域的最小面积.

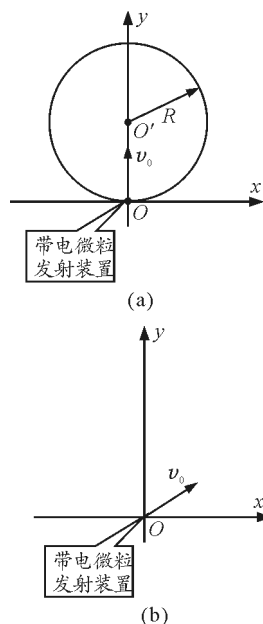


图1 题图

笔者发现,在教学过程中,对于典例中第(2)问的求解过程,学生感觉难度很大,如果在解决该问题之前,能够先熟悉掌握以下运动模型,可以使教学变得从容,从而让学生求解以上问题变得更加轻松.

### 3 模型概述

设圆形磁场方向垂直纸面向外,磁感应强度大小为  $B$ ,一带正电的微粒从圆形磁场圆形边界  $A$  点入射.为方便讨论,本文中带电粒子的速率  $v$  不做特别说明均认为

$$v = \frac{qBR}{m}$$

其中  $q$  为带电粒子的电荷量,  $B$  为圆形匀强磁场的磁感应强度,  $R$  为带电粒子在匀强磁场中的圆轨迹半径,亦为磁场圆的半径,  $m$  为带电粒子的质量,粒子的重力不计.

### 4 模型结论

**结论 1:**带电粒子以速率  $v$  从圆形匀强磁场边界任意位置沿半径射入磁场,必沿半径方向射出磁场.

证明:如图 2 所示,  $AO=BO=AO'=BO'$ ,且  $AO \perp AO'$ ,  $BO' \perp BO$ ,故四边形  $AOBO'$  为正方形,  $BO \perp BO'$ ,因此  $v_B$  与  $BO$  在一条直线上,沿半径方向射出磁场.

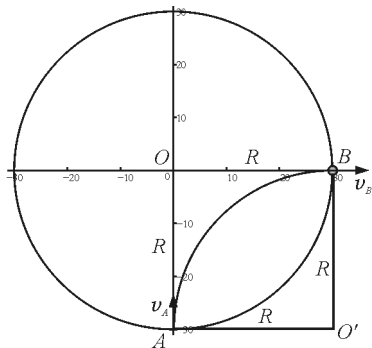


图 2 结论 1 分析图

**结论 2:**带电粒子以速率  $v$  从圆形匀强磁场边界任意位置以任意方向进入磁场,则粒子出磁场时的速度方向必垂直于粒子进磁场位置所在的圆直径且平行于入射点磁场圆的切线.

情形 1:入射角  $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$  (入射角  $\theta$  指的是入射速度  $v_A$  与入射点  $A$  所在的磁场圆的切线  $AC$  方向的夹角,见图 3)

证明:如图 3 所示,过  $A$  点作直线  $AC$  与磁场圆相切,过  $B$  点作  $v_B$  的反向延长线  $BD$ ,  $O$  和  $O'$  为磁场圆与轨迹圆的圆心,  $AO=BO=BO'=AO'=R$ ,故四边形  $AOBO'$  为菱形,  $BD \perp AO$ ,  $v_B \perp AO$ ,即  $v_B \perp AE$  (直径),而  $AC \perp AO$ ,  $v_B \parallel AC$ .

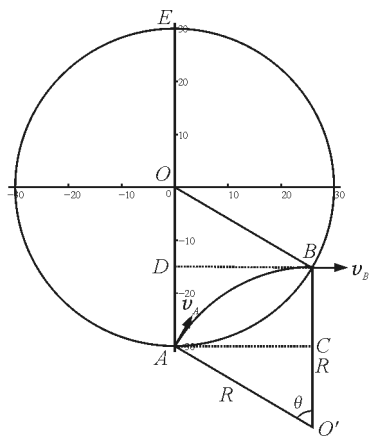


图 3 结论 2 情形 1 分析图

情形 2:入射角  $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

证明:如图 4 所示,过  $B$  点作  $v_B$  的反向延长线  $BC$ ,  $O$  和  $O'$  为磁场圆与轨迹圆的圆心,  $AO=BO=BO'=AO'=R$ ,四边形  $AOBO'$  为菱形,  $BO' \parallel AO$ ,即  $BO' \parallel AD$ ,而  $v_B \perp BO'$ ,故  $v_B \perp AD$  (直径),另  $AE \perp AD$  (直径),  $v_B \parallel AE$ .

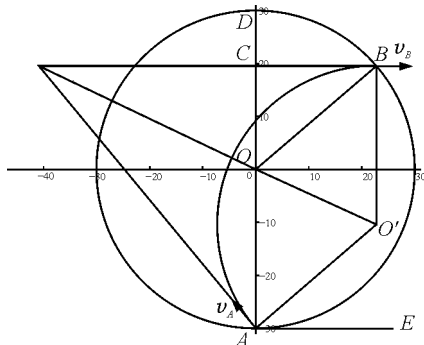


图 4 结论 2 情形 2 分析图

**结论 3:**大量相同的带电粒子以速率  $v$  从圆形匀强磁场边界任意位置以任意方向进入磁场,则所有带电粒子离开磁场时速度方向必相同(平行).

证明:如图 5 所示,由结论 2 的证明可知,从相同点入射的速率相同方向不同的带电粒子出射方向均与同一直径垂直或与入射点的同一切线平行,故带电粒子出磁场的出射速度方向必互相平行.

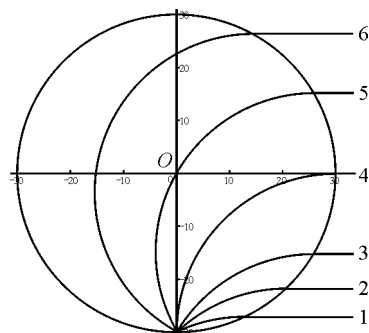


图 5 结论 3 分析图

**结论 4:**带电粒子以速率  $v$  从圆形匀强磁场边界任意位置以任意方向进入磁场,离开磁场时的速度方向与进入磁场时位置的垂直高度距离  $y$  最大值不超过  $2R$ ,且满足下列关系.

(1) 若入射角  $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$ , 则

$$y = R(1 - \cos \theta)$$

或  $\theta = \arccos \left( 1 - \frac{y}{R} \right)$

(2) 若入射角  $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ , 则

$$y = R[1 + \cos(\pi - \theta)]$$

或  $\theta = \pi - \arccos \left( \frac{y}{R} - 1 \right)$

证明:以入射点  $A$  作为坐标原点,  $A$  点磁场圆切线为  $x$  轴,直径为  $y$  轴,建立平面直角坐标系,设入射速度  $v_A$  与  $x$  轴的夹角为  $\theta$ .

(1) 如图 6 所示,若入射角  $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$ , 则出射点在水平直径右下圆弧  $B$  点,结合图,由几何关系易知: $B$  点的纵坐标  $y = R(1 - \cos \theta)$ ,即为带电粒子离开磁场时的速度方向与进入磁场时位置的垂直高度距离,另  $y$  与  $\theta$  满足关系

$$\theta = \arccos \left( 1 - \frac{y}{R} \right)$$

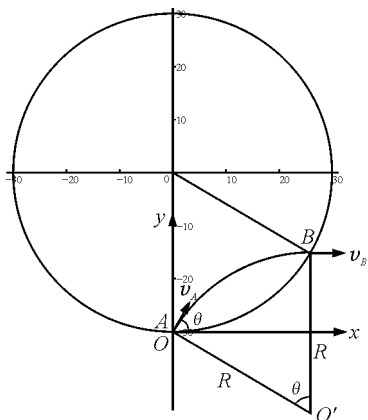


图 6 结论 4 当  $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$  时的分析图

(2) 如图 7 所示,若入射角  $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ , 则出射点在水平直径右上圆弧  $B$  点,结合图由几何关系易知: $B$  点的纵坐标  $y = R[1 + \cos(\pi - \theta)]$ ,即为带电粒子离开磁场时的速度方向与进入磁场时位置的垂直高度距离,另  $y$  与  $\theta$  满足关系

$$\theta = \pi - \arccos \left( \frac{y}{R} - 1 \right)$$

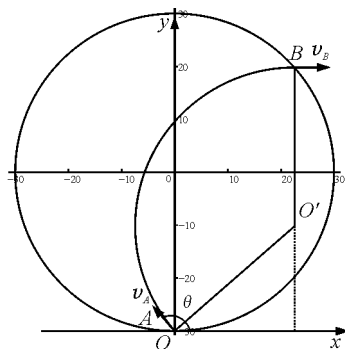


图 7 结论 4 当  $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$  时的分析图

从图 7 易知:就算入射角  $\theta = \pi$ , 即假如粒子能沿着磁场边界做圆周运动,则  $y = 2R$ , 因此,带电粒子离开磁场时的速度方向与进入磁场时位置的垂直高度距离  $y$  最大值不超过  $2R$ .

**结论 5:**从圆形匀强磁场边界任意位置以任意方向速度  $v$  进入磁场的带电粒子 1 运动轨迹与以该粒子出磁场时的速度  $v$  反方向且速度等大进入圆形匀强磁场区域中带电粒子 2 轨迹之和为定值  $s_1 + s_2 = \pi R$ , 且带电粒子 1 的入射点和带电粒子 2 的出射点分别在磁场圆直径的两端点.

证明:如图 8 所示,  $AE, BE, FH$  均为带电粒子进磁场和出磁场位置轨迹圆的切线,  $AC$  和  $BD$  为带电粒子进磁场和出磁场位置磁场圆的切线, 由结论 2 可知,  $AC \parallel BE, BD \parallel FH \parallel AE$ ; 而  $\angle BFH + \angle EFH = 180^\circ; \angle AEF = \angle EFH$ , 又  $\angle BFH + \angle EFH = 180^\circ$ , 故  $\angle AEF + \angle BFH = 180^\circ$ , 因  $\angle AEF$  和  $\angle BFH$  均为带电粒子在磁场中的磁偏转角, 由磁场知识可知磁偏转角与轨迹圆的圆心角相等, 因此,  $\widehat{AB}$  与  $\widehat{BH}$  对应的圆心角之和为  $180^\circ$ , 故  $s_A + s_B = \pi R$ , 且  $AH = 2R$ , 所以带电粒子 1 的入射点和带电粒子 2 的出射点分别在磁场圆直径的两端点.

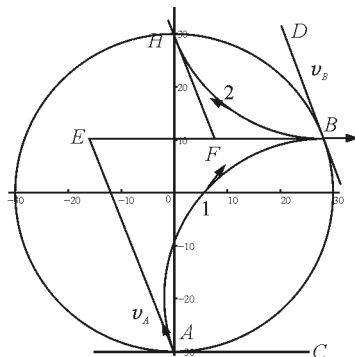


图 8 结论 5 证明分析图

仿真实验检验如图 9, 图 10, 图 11 所示.



图9 运动对象设置

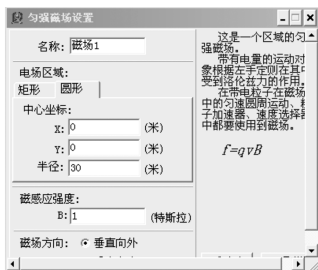


图10 匀强磁场设置

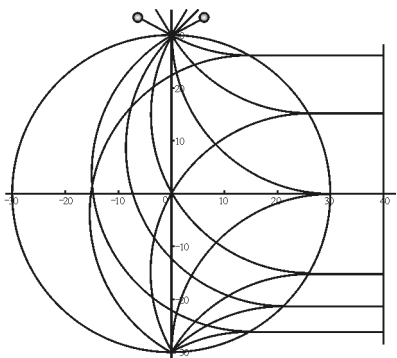


图11 模拟结果

取磁场磁感应强度大小  $B = 1 \text{ T}$ , 磁场半径  $R = 30 \text{ m}$ , 带电小球质量  $M = 3 \text{ kg}$ ,  $Q = 1 \text{ C}$ , 弹性系数为 1, 在磁场右边设置一块竖直的弹性挡板, 分别让多个相同属性的带电小球 (不设重力场) 以相同大小的速率  $v = 10 \text{ m/s}$ , 从 A 点以不同的入射角  $\theta$  同时进入磁场, 实验发现所有的小球经过与入射点所在的直径平行的弹性挡板反弹之后在直径的另一端同时相遇, 与理论预期一致。

## 5 问题解答

有了以上模型分析得出的结论, 下面来解决文中一开始出现的典例。

### 5.1 分析

第(1)问由题目中“带电粒子从坐标原点  $O$  处沿  $y$  轴正方向进入磁场后, 最终沿圆形磁场区域的水平直径离开磁场并继续沿  $x$  轴正方向运动”可知:

其一, 带电微粒所受重力必与电场力平衡, 洛伦

兹力作向心力使得带电微粒做匀速圆周运动。

其二, 带电微粒在磁场中做匀速圆周运动的轨迹圆半径与磁场圆半径必相等。

第(2)问由题可知, 在圆形磁场同一点发射大量相同速率不同方向的同种粒子符合本文模型, 由于入射范围在第 I 象限内, 即入射角  $\theta$  与  $x$  轴正方向的夹角满足  $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$ , 由本文结论 2 和结论 3 可知, 出射速度均与  $x$  轴平行, 与入射点所在磁场圆直径垂直, 所有粒子出磁场的出射点必在磁场圆的圆弧上, 学生一旦掌握了这个结论, 就很容易找到磁场范围的右边界, 即为磁场右下  $\frac{1}{4}$  圆弧。另外, 当  $\theta =$

$\frac{\pi}{2}$  时, 带电粒子的轨迹正好成为磁场范围的左边界, 那么最小的磁场面积应该为这两个  $\frac{1}{4}$  圆弧所围成的不规则图形的面积。

### 5.2 详细解答

**解:** (1) 由题目中“带电粒子从坐标原点  $O$  处沿  $y$  轴正方向进入磁场后, 最终沿圆形磁场区域的水平直径离开磁场并继续沿  $x$  轴正方向运动”可知, 带电微粒所受重力与电场力平衡。设电场强度大小为  $E$ , 由平衡条件得

$$mg = qE$$

故

$$E = \frac{mg}{q}$$

电场方向沿  $y$  轴正方向, 带电微粒进入磁场后, 做匀速圆周运动, 且圆运动半径  $r = R$ 。设匀强磁场的磁感应强度大小为  $B$ 。由牛顿第二定律得

$$qv_0 B = \frac{mv_0^2}{R}$$

故

$$B = \frac{mv_0}{qR}$$

磁场方向垂直于纸面向外。

(2) 设由带电微粒发射装置射入第 I 象限的带电微粒的初速度方向与  $x$  轴成夹角  $\theta$ , 则  $\theta$  满足  $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$ , 由于带电微粒最终将沿  $x$  轴正方向运动, 故  $\mathbf{B}$  应垂直于  $xOy$  平面向外, 带电微粒在磁场内做半径为  $R = \frac{mv_0}{qB}$  的匀速圆周运动。由于带电微粒的入

(下转第 73 页)

(2) 我们在电话里是根据什么来判断谁在说话的。

(3) 弦乐器的“定弦”是为了改变什么? 选做题让学生利用手机示波器软件对比生活中不同声音波形的差异, 结合所学知识解释原因。

**设计意图:** 必做题让学生检测并巩固所学知识, 选做题提升学生探究兴趣和能力。

物理学科核心素养主要包括“物理观念”“科学思维”“科学探究”“科学态度与责任”4个方面。物理概念的教学过程是学生进行科学探究、运用科学思维、形成物理观念、培养科学态度与责任的过程, 是学生形成物理核心素养的关键教学活动之一。在概念的教学过程中, 丰富的感性认识对学生深入理解物理概念的本质起着至关重要的作用。本节课的教学设计安排了听一听、辨一辨、做一做等活动, 增加了学生实验和 Oscilloscope 软件进行自主探究的环节, 组织了“声学成语大比拼”的竞赛。这些教学举措可以在学生学习物理概念的过程中发挥积极的作用。

(上接第 69 页)

射方向不同, 若磁场充满纸面, 它们所对应的运动轨迹如图 12 所示。为使这些带电微粒经磁场偏转后沿  $x$  轴正方向运动。由图 12 可知, 它们必须从  $O$  点做圆周运动的各圆的最高点飞离磁场。

这样磁场边界上  $P$  点的坐标  $P(x, y)$  应满足方程:

$$x = R \sin \theta \quad y = R(1 - \cos \theta)$$

所以磁场边界的方程为

$$x^2 + (y - R)^2 = R^2$$

由题中  $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$  的条件可知, 以  $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$  的角度射入磁场区域的微粒的运动轨迹

$$(x - R)^2 + y^2 = R^2$$

即为所求磁场的另一侧的边, 因此, 符合题目要求的最小磁场的范围应是圆  $x^2 + (y - R)^2 = R^2$  与圆  $(x - R)^2 + y^2 = R^2$  的交集部分(图 12 中阴影部分)。由几何关系, 可以求得符合条件的磁场的最小面积为

$$S_{\min} = \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right) \frac{m^2 v_0^2}{q^2 B^2}$$

通过这个教学案例, 我们可以得到一些启示。首先, 教师应建立“物理核心素养培养”的教学观, 在物理概念教学中以科学探究活动为线索, 引导学生科学思维, 形成物理观念, 培养科学态度与责任。其次, 物理概念是物理学家在探索物理世界中逐步形成的, 是在大量感性认识的基础上通过科学思维而形成的。在概念教学中, 教师应让学生尽可能经历物理学家探索的过程, 通过多种素材和活动丰富学生的感性认识, 让学生经历运用物理概念解决问题的过程, 从而深化物理概念的理解, 最终形成物理观念。

### 参考文献

- 1 中华人民共和国教育部. 普通高中物理课程标准. 北京: 人民教育出版社, 2017
- 2 邢红军. 物理教学论. 北京: 北京大学出版社, 2015
- 3 郭玉英. 从三维课程目标到物理核心素养. 物理教学, 201(11): 2 ~ 4, 8
- 4 赵兴华, 何其荣. 利用音频 APP 演示声音特性的物理创新实验. 课程教学研究, 2017(4): 78 ~ 80

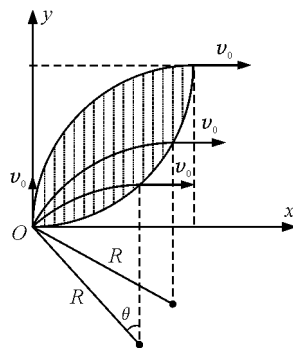


图 12 最小磁场范围

### 6 结束语

通过对以上运动模型的分析可知: 学好“ $v = \frac{qBR}{m}$ ”的带电粒子在圆形匀强磁场中运动的物理模型, 掌握好该物理模型的结论, 对物理解题有很大的帮助, 不仅可以帮助教师优化教学方法, 而且能让学生学得更加轻松, 进而喜爱物理解题。

### 参考文献

- 1 梁久琳. 仿真实验法在中学物理教学中的应用探讨: [硕士学位论文]. 长春: 东北师范大学, 2009