对极端法应用的有关思考

王智荣
（山西省实验中学　山西 太原　030031）

（收稿日期：2017 - 04 - 19）

摘　要：以竖直上抛运动的初速度和单摆周期的取值变化为研究内容，阐述了极端法在探究物理规律中的应用和限制条件.

关键词：极端法　外推　极限情况

极端法（又称极限法）是一种科学的思维方法. 假若某物理量在某一区间内是单调连续变化的，我们可以将该物理量或它的变化过程和现象外推到该区域内的极限情况或极端值，使问题的本质迅速暴露出来，并依此作出科学分析，得到规律性的认识或正确的判断. 但是，极端法绝非"走极端"，因为物理规律的成立一般都是有限制条件的，忽视了物理内容，只是纯数学地无限外推，可能会进入死胡同而得出错误的结果，下面以例说明.

1　初速度必须无穷大吗

学完竖直上抛运动后，有学生根据上抛物体的初速度 v_0 与能上抛的最大高度 h 的关系式 $v_0=\sqrt{2gh}$ 极限外推得到这样的结论：要想在地表把物体竖直上抛至无穷远处，初速度 v_0 必须无穷大. 真的是这样吗？实则，物体离地表的高度 h 较大时，由于高度的变化所引起的重力加速度（万有引力加速度）的变化必须考虑进去，则物体的竖直上抛运动就不能再当做匀变速去对待了. 定量分析如下：

设上抛物体的质量为 m，地球的质量为 M，地表的重力加速度为 g，在地表竖直上抛的初速度为 v_0，上升至距地表 h 高度处时的速度为 v. 物体在上升过程中不考虑阻力影响，则从地表抛出到上升至距地表高度为 h 处，对物体和地球构成的系统机械能守恒. 有

$$\frac{1}{2}mv_0^2-\frac{GMm}{R}=\frac{1}{2}mv^2-\frac{GMm}{R+h}$$

又因为

$$m\frac{GM}{R^2}=mg$$

易得 v 和 h 的关系为

$$v^2=v_0^2-2g\,\frac{R}{1+\dfrac{R}{h}}=$$

$$v_0^2-2g\,\frac{h}{1+\dfrac{h}{R}}=$$

$$v_0^2-2g\,\frac{1}{\dfrac{1}{R}+\dfrac{1}{h}}$$

下面对上式进行讨论：

（1）当 h 无限大，即将物体竖直上抛至无穷远处时，有

$$\frac{R}{1+\dfrac{R}{h}}\rightarrow R$$

并且 v 刚好减为零. 代入上面等式，有

$$v_0^2=2g\,\frac{R}{1+\dfrac{R}{h}}=2gR$$

得

$$v_0=\sqrt{2gR}=11.2\ \text{km/s}$$

此即第二宇宙速度. 可见要将物体竖直上抛至无穷远处时，初速度 v_0 并非无穷大.

（2）当 $h\ll R$ 时，即物体从地球表面以初速度 v_0 向上抛出，到达高度 h 速度减为零时，有

$$\frac{h}{1+\dfrac{h}{R}}\rightarrow h$$

则有

$$v_0^2=2g\,\frac{h}{1+\dfrac{h}{R}}=2gR$$

得

$$v_0=\sqrt{2gh}$$

此即中学物理中为了研究问题的方便，总是把物体上升过程受到的地球引力看成恒力 mg，从而把竖直上抛运动处理成匀减速直线运动而得到的结果.

（3）当 $h=R$ 时，即假若上抛高度等于地球半径

R,有

$$\frac{1}{\frac{1}{R}+\frac{1}{h}}=\frac{R}{2}$$

则有

$$v_0^2=2g\frac{1}{\frac{1}{R}+\frac{1}{h}}=2g\frac{R}{2}=gR$$

得

$$v_0=\sqrt{gR}=7.9\ \mathrm{km/s}$$

此即为第一宇宙速度,表明要把小球竖直上抛至距地表高度为地球的半径,所需的初速度 v_0 为第一宇宙速度.

2 单摆的周期一定无限大吗

学完单摆的周期公式 $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$,有学生认为当 $l\to\infty$ 时,$T\to\infty$. 真的是这样吗? 下面我们进行分析.

如图 1 所示,摆线上端固定在 O' 点,下端连一质量为 m 的摆球,摆长为 l,地球球心在 O 点,地球的质量为 M,半径为 R,地表的重力加速度为 g. 现让摆球偏离平衡位置一个很小的角度 α,此时摆球(质点)和地心的连线与 OO' 连线成 β 角,摆球受到的力有地球对它的引力 $F_{万}$,还有摆线对它的拉力 F_{T},设摆球到地球球心的距离为 r,有 $F_{万}=\frac{GMm}{r^2}$.

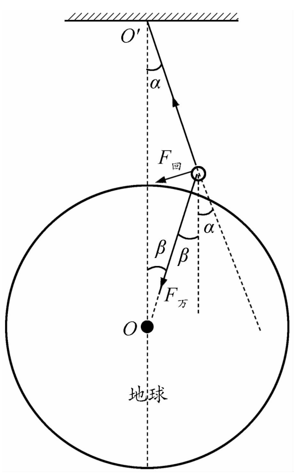

图 1 单摆分析图示

因为摆球距地表的距离相对地球半径而言很小,可近似认为 $r\approx R$,则有

$$F_{万}=\frac{GMm}{R^2}=mg$$

$F_{万}$ 垂直摆线方向的分力充当回复力 $F_{回}$,设此时摆球偏离平衡位置的位移为 x,且方向为正,则

$$F_{回}=-mg\sin(\alpha+\beta)$$

考虑到 α 角很小,显然 β 也很小,$(\alpha+\beta)$ 亦很小,有

$$\sin\alpha\approx\frac{x}{l}$$

$$\sin\beta\approx\frac{x}{R}$$

$$\sin(\alpha+\beta)\approx\alpha+\beta$$

因此回复力

$$F_{回}=-mg\sin(\alpha+\beta)\approx-mg(\alpha+\beta)\approx-mg\left(\frac{x}{l}+\frac{x}{R}\right)=-kx$$

所以其周期为

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=2\pi\sqrt{\frac{1}{g\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{l}\right)}}=2\pi\sqrt{\frac{R}{g\left(1+\frac{R}{l}\right)}}=2\pi\sqrt{\frac{l}{g\left(1+\frac{l}{R}\right)}}$$

下面对上式进行讨论:

(1)当 $l\gg R$ 时,即 l 无限长时

$$T=2\pi\sqrt{\frac{R}{g\left(1+\frac{R}{l}\right)}}=2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}\approx84.6\ \mathrm{min}$$

数值上恰好与近地环绕卫星周期相同,等价于摆长为地球半径的单摆的周期,并非无穷大.

(2)当 $l\ll R$ 时

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g\left(1+\frac{l}{R}\right)}}=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

此即中学课本中的单摆周期公式. 因为 $l\ll R$ 时,$x=l\sin\alpha\ll R$,有 $\sin\beta=\frac{x}{R}\to0$,此时可认为角 $\beta=0$,可以忽略不计,课本在推导单摆周期公式时就认为重力竖直向下,忽略了 β 角的影响.

(3)当 $l=R$ 时,即假若摆长和地球半径等长

$$T=2\pi\sqrt{\frac{1}{g\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{l}\right)}}=2\pi\sqrt{\frac{R}{2g}}\approx59.8\ \mathrm{min}$$

3 结束语

实则,如果我们研究的物理问题是非连续函数或者分段函数时,一般都不能从数学式的表面现象出发,简单地外推到极限,否则就会走向"极端". 我们在平时教学中要善于发现引导学生养成科学的思考习惯,形成良好的物理思维.