

逐差法处理测电源电动势和内阻数据的研究

何述平

(西北师范大学教育学院物理教育研究所 甘肃 兰州 730070)

(收稿日期:2017-07-03)

摘要:细致推证了线性函数的逐差法,并运用于测电源电动势和内阻的数据处理,结合测量数据给出了合理运用结果;讨论了逐差法的特点,提出了相应的教学建议;拓展了现行教科书中的相关方法.

关键词:线性函数 逐差法 电动势 内阻 数据处理

1 引言

测电源电动势和内阻实验是普通高中课程标准实验教科书《物理·选修3-1》的基本内容^[1,2],原理方法有伏安法、伏阻法、安阻法^[1~5],数据处理方法有方程法和图像法^[1~4].然而,可否运用逐差法?有怎样的特点?就此进行相应研究,以期推证线性函数逐差法,并运用于测电源电动势和内阻的数据处理,拓展现行教科书中的相关方法,并为教学设计奠定层次性、开放性的物理基础.

2 线性函数逐差法的推证

逐差法是物理实验数据处理的基本方法,也是解决拟合(回归)直线时方程数多于变量数的方法^[6];据此简明推证线性函数逐差法.设直接测量物理量 x, y 呈线性关系

$$y = a_0 + a_1 x \quad (1)$$

式中 a_0 和 a_1 为间接测量量(恒量).测 $2n$ 组数据 $(x_i, y_i), i=1, 2, \dots, 2n, n \geq 1$,按测量数据大小依次代入式(1),得 $2n$ 个线性方程.依据逐差法处理数据的基本思想(差分-平均)^[6],式(1)的 $2n$ 个线性方程隔 n 项逐差,得

$$y_{n+i} - y_i = a_1(x_{n+i} - x_i) \quad (2)$$

式(2)求和,得

$$a_1 = \frac{\sum_{i=1}^n y_{n+i} - \sum_{i=1}^n y_i}{\sum_{i=1}^n x_{n+i} - \sum_{i=1}^n x_i} \quad (3)$$

式(1)的 $2n$ 个线性方程求和,得

$$a_0 = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} (y_i - a_1 x_i) \quad (4)$$

式(3)代入式(4),化简得

$$a_0 = \frac{1}{n} \frac{\sum_{i=1}^n x_{n+i} \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_{n+i}}{\sum_{i=1}^n x_{n+i} - \sum_{i=1}^n x_i} \quad (5)$$

简化式(5)、(3),有

$$a_0 = \frac{\overline{x_q} \overline{y_p} - \overline{x_p} \overline{y_q}}{\overline{x_q} - \overline{x_p}} \quad (6)$$

$$a_1 = \frac{\overline{y_q} - \overline{y_p}}{\overline{x_q} - \overline{x_p}} \quad (7)$$

式中 $\overline{x_p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \overline{x_q} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{n+i}; \overline{y_p}, \overline{y_q}$ 类同.式(6)、(7)表明了线性函数逐差法取平均效果的意义.式(5)、(3)或式(6)、(7)分别是线性函数的 a_0 和 a_1 估值的逐差法表达式.

3 逐差法处理测电源(E, r)数据

3.1 伏安-逐差法

伏安法测电源电动势和内阻有电流表内、外接(相对电源)两种方式,分别如图1和图2所示.不考虑电表影响,由闭合电路欧姆定律均有

$$U = E - Ir \quad (8)$$

式(8)表明: U 与 I 呈线性关系(E, r 为恒量).于是,测偶数组数据 (I_i, U_i) ,由式(8)及式(5)、(3)处理数据得 $E_{\text{测}}, r_{\text{测}}$.

3.1.1 伏安内接式

如图1所示为伏安内接式电路,考虑电流表分压的影响,由闭合电路欧姆定律有

$$U = E - I(r + R_A) \quad (9)$$

比较式(9)、(8)并修正已定系统误差,有

$$E_{\text{内修}} = E_{\text{内测}} \quad r_{\text{内修}} = r_{\text{内测}} - R_A \quad (10)$$

式(10)表明:伏安内接式测电源电动势和内阻中,仅电流表内阻 R_A 对测电源内阻 r 带来影响($R_A \rightarrow 0$ 时,影响为零)。

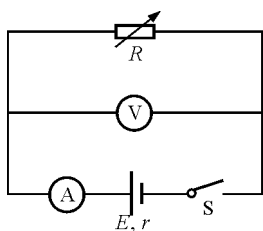


图1 伏安内接式电路

3.1.2 伏安外接式

如图2所示为伏安外接式电路,考虑电压表分流的影响,由闭合电路欧姆定律有

$$U = E - \left(I + \frac{U}{R_V}\right)r \quad (11)$$

式(11)变形,得

$$U = \frac{R_V}{R_V + r}E - I \frac{R_V r}{R_V + r} \quad (12)$$

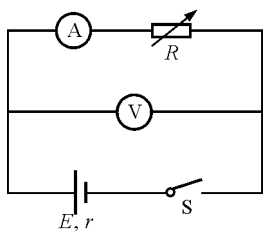


图2 伏安外接式电路

比较式(12)、(8)并修正已定系统误差,有

$$E_{\text{外修}} = \frac{R_V E_{\text{外测}}}{R_V - r_{\text{外测}}} \quad r_{\text{外修}} = \frac{R_V r_{\text{外测}}}{R_V - r_{\text{外测}}} \quad (13)$$

式(13)表明:伏安外接式测电源电动势和内阻中,仅电压表内阻 R_V 对测电源电动势 E 和内阻 r 带来影响($R_V \rightarrow \infty$ 时,影响为零)。

3.2 伏阻-逐差法

伏阻法测电源电动势和内阻的电路如图3所示。

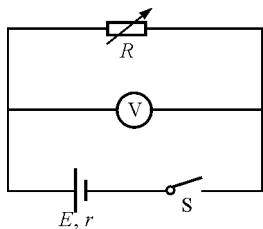


图3 伏阻法电路

不考虑电表影响,由闭合电路欧姆定律有

$$E = U + \frac{U}{R}r \quad (14)$$

式(14)线性化,得

$$\frac{1}{U} = \frac{1}{E} + \frac{r}{E} \frac{1}{R} \quad (15)$$

式(15)表明: $\frac{1}{U}$ 与 $\frac{1}{R}$ 呈线性关系(E, r 为恒量)。于是,测偶数组数据(R_i, U_i),由式(15)及式(5)、(3)处理数据得 $E_{\text{伏测}}, r_{\text{伏测}}$ 。

考虑电压表分流的影响,由闭合电路欧姆定律有

$$E = U + \frac{U}{R // R_V}r \quad (16)$$

式(16)线性化有

$$\frac{1}{U} = \frac{1}{E} \left(1 + \frac{r}{R_V}\right) + \frac{r}{E} \frac{1}{R} \quad (17)$$

比较式(17)、(15)并修正已定系统误差,有

$$E_{\text{伏修}} = \frac{R_V E_{\text{伏测}}}{R_V - r_{\text{伏测}}} \quad r_{\text{伏修}} = \frac{R_V r_{\text{伏测}}}{R_V - r_{\text{伏测}}} \quad (18)$$

式(18)表明:伏阻法测电源电动势和内阻中,电压表内阻 R_V 对测电源电动势 E 和内阻 r 带来影响($R_V \rightarrow \infty$ 时,影响为零)。

3.3 安阻-逐差法

安阻法测电源电动势和内阻的电路如图4所示。

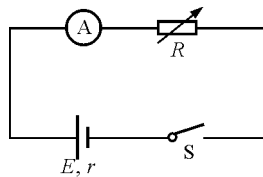


图4

不考虑电表影响,由闭合电路欧姆定律有

$$E = I(r + R) \quad (19)$$

式(19)线性化,得

$$\frac{1}{I} = \frac{r}{E} + \frac{1}{E}R \quad (20)$$

式(20)表明: $\frac{1}{I}$ 与 R 呈线性关系(E, r 为恒量)。

于是,测偶数组数据(R_i, I_i),由式(20)及式(5)、(3)处理数据得 $E_{\text{安测}}, r_{\text{安测}}$ 。

考虑电流表分压的影响,由闭合电路欧姆定律有

$$E = I(r + R + R_A) \quad (21)$$

式(21)线性化有

$$\frac{1}{I} = \frac{r + R_A}{E} + \frac{1}{E}R \quad (22)$$

比较式(22)、(20)并修正已定系统误差,有

$$E_{\text{安修}}=E_{\text{安测}} \quad r_{\text{安修}}=r_{\text{安测}}-R_A \tag{23}$$

式(23)表明:安阻法测电源电动势和内阻中,电流表内阻 R_A 对测电源内阻 r 带来影响($R_A \rightarrow 0$ 时,影响为零).

4 逐差法的运用结果

取测同一节1号干电池电动势和内阻的数据(所用仪器:简式电阻箱J2362型;直流安培计J0407型,0.6 A挡, $R_A=0.124\ \Omega$;直流伏特计J0408型,3 V挡, $R_V=3\ \text{k}\Omega$)^[5],如表1所示.依次运用上述推证的线性函数逐差法处理测电源电动势和内阻数据的结果如下.

表1 测量数据

电路	图1		图2		图3	图4
R/Ω	I/A	U/V	I/A	U/V	U/V	I/A
2	0.57	1.22	0.58	1.32	1.30	0.58
3	0.42	1.31	0.42	1.38	1.36	0.43
5	0.27	1.39	0.27	1.43	1.41	0.27
10	0.14	1.46	0.14	1.48	1.48	0.15
15	0.10	1.48	0.10	1.49	1.49	0.10
20	0.08	1.49	0.08	1.50	1.50	0.08

4.1 伏安-逐差法的结果

4.1.1 伏安内接式

(1) 测量结果

由式(8)及式(5)、(3)、表1中(I_i,U_i)数据得

$$E_{\text{内测}}=1.53\ \text{V} \quad r_{\text{内测}}=0.54\ \Omega$$

(2) 修正结果

由式(10)、 R_A 数据和表1测量结果得

$$E_{\text{内修}}=1.53\ \text{V} \quad r_{\text{内修}}=0.42\ \Omega$$

4.1.2 伏安外接式

(1) 测量结果

由式(8)及式(5)、(3)、表1中(I_i,U_i)数据得

$$E_{\text{外测}}=1.53\ \text{V} \quad r_{\text{外测}}=0.36\ \Omega$$

(2) 修正结果

由式(13)、 R_V 数据和上述测量结果得

$$E_{\text{外修}}=1.53\ \text{V} \quad r_{\text{外修}}=0.36\ \Omega$$

4.2 伏阻-逐差法的结果

(1) 测量结果

由式(15)及式(5)、(3)、表1中(R_i,U_i)数据得

$$\frac{1}{E_{\text{伏测}}}=0.653\ \text{V}^{-1} \quad \frac{r_{\text{伏测}}}{E_{\text{伏测}}}=0.246\ \text{A}^{-1}$$

进而有 $E_{\text{伏测}}=1.53\ \text{V} \quad r_{\text{伏测}}=0.38\ \Omega$

(2) 修正结果

由式(18)、 R_V 数据和上述测量结果得

$$E_{\text{伏修}}=1.53\ \text{V} \quad r_{\text{伏修}}=0.38\ \Omega$$

4.3 安阻-逐差法的结果

(1) 测量结果

由式(20)及式(5)、(3)、表1中(R_i,I_i)数据得

$$\frac{1}{E_{\text{安测}}}=0.612\ \text{V}^{-1} \quad \frac{r_{\text{安测}}}{E_{\text{安测}}}=0.543\ \text{A}^{-1}$$

进而有 $E_{\text{安测}}=1.63\ \text{V} \quad r_{\text{安测}}=0.88\ \Omega$

(2) 修正结果

由式(23)、 R_A 数据和上述测量结果得

$$E_{\text{安修}}=1.63\ \text{V} \quad r_{\text{安修}}=0.76\ \Omega$$

上述4种处理测电源电动势和内阻数据的逐差法结果与相应运用最小二乘法结果^[7]非常接近,因此,逐差法结果具有合理性.

5 逐差法的讨论

5.1 缘何宜按数据大小排序

依据误差的方合根合成,对式(7)有

$$\frac{s_{a_1}}{a_1}=\sqrt{\frac{s_{\bar{y}_q}^2+s_{\bar{y}_p}^2}{(\bar{y}_q-\bar{y}_p)^2}+\frac{s_{\bar{x}_q}^2+s_{\bar{x}_p}^2}{(\bar{x}_q-\bar{x}_p)^2}} \tag{24}$$

式中 s 为标准差.由式(24)知: $\bar{y}_q-\bar{y}_p$ 及 $\bar{x}_q-\bar{x}_p$ 的数值越大, $\frac{s_{a_1}}{a_1}$ 就越小,即 a_1 的相对误差越小.因此,运用逐差法时宜按数据大小排序.

5.2 特点比较

自变量[式(8)的 I ,式(15)的 $\frac{1}{R}$,式(20)的 R]

非等间距变化,则上述4种逐差法均为非严格意义的逐差法,即差值法^[6];虽形式不同,但实质均为线性函数逐差法.上述推证和运用表明,线性函数逐差法形式简明、运算简便(代数形式、代数运算)、结果合理;因此,线性函数逐差法可作为处理测电源电动势和内阻数据的基本方法.

比较上述4种逐差法知,从线性函数逐差法处理数据的单一角度看,简捷程度(由简到繁)依次为:伏安内接式-逐差法、伏安外接式-逐差法、安阻-逐差法、伏阻-逐差法;但从原理方法的准确程度(即电表内阻的影响,已定系统误差)、逐差法的简捷程度的综合角度看,测电源电动势和内阻的合理、可行的方法顺序为:伏安外接式-逐差法、伏阻-逐差法、伏

安内接式-逐差法、安阻-逐差法.因此,更宜采用伏安外接式-逐差法.这就为测电源电动势和内阻的教学设计奠定了层次性、开放性的物理基础.

6 教学建议

6.1 误差分析建议

对测电源电动势和内阻实验进行误差分析的目的,是明确已定系统误差产生的原因即电表内阻的影响,从而为合理选取测量电路提供依据.在此基础上,可考虑由有电表影响的测电源电动势和内阻的表达式进一步理解等效电源(电压源),如伏安外接式: $E_{\text{外测}} = \frac{R_V E}{R_V + r}$ 和 $r_{\text{外测}} = \frac{R_V r}{R_V + r}$,再结合图2,可自然而然理解为什么等效电源($E_{\text{外测}}, r_{\text{外测}}$)是电压表V与电源(E, r)的并联;其他的,类同.对已定系统误差的修正[如式(10)、(13)],可作为测电源电动势和内阻实验的提高性要求.

6.2 数据处理方法建议

梳理测电源电动势和内阻实验的数据处理方法,有图像法^[7]、平均法(现行教科书中称为“方程法”^[1~4],实质为平均法^[8])、逐差法;而图像法可依据作图工具分为作图图像法和回归图像法.准确程度为:回归图像法(实质为最小二乘法)最好,平均法、逐差法其次,且相当,作图图像法最次.因此,就测电源电动势和内阻实验的数据处理教学而言,可依据学生发展需求尝试运用不同方法,这既可延续“一题多解”的理念,进一步发展物理发散思维;又可更好地理解物理方法的价值,培养与提升物理实验数据处理能力.

7 结语

不仅简明推证了线性函数逐差法,给出了处理测电源电动势和内阻数据的逐差法;而且结合测量数据提供了运用逐差法的合理测量结果、修正结果.讨论了逐差法的特点,提出了处理测电源电动势和内阻的合理方法顺序,给出了误差分析、数据处理方法的教学建议;拓展了现行普通高中课程标准实验教科书中测电源电动势和内阻实验的数据处理方法.

线性函数逐差法可作为高中物理学方法论教育的显性化内容,应是高中物理教师清晰并能灵活运用的物理实验数据处理的基本方法.

参考文献

- 1 人民教育出版社课程教材研究所,物理课程教材研究开发中心.普通高中课程标准实验教科书·物理选修3-1(第3版).北京:人民教育出版社,2010.70~71
- 2 束炳如,何润伟.普通高中课程标准实验教科书·物理选修3-1(第2版).上海:上海科技教育出版社,2007.82~85
- 3 陶洪.物理实验论.南宁:广西教育出版社,1996.174~177
- 4 王兴乃,罗栋国.高中物理实验大全(第2册).北京:电子工业出版社,1989.279~290
- 5 安忠,刘炳昇.中学物理实验教学研究.北京:高等教育出版社,1986.237~238
- 6 龚镇雄.普通物理实验中的数据処理.西安:西北电讯工程学院出版社,1985.119~123
- 7 何述平.图像法处理测电源电动势和内阻数据的研究.物理教师,2013,34(8):58~60
- 8 何述平.平均法处理测电源电动势和内阻数据的研究.物理实验,2013,33(6):16~19

Study on the Treatment of EMF and Internal Resistance Data by Successive Difference Method

He Shuping

(Research Institute of Physics Education, College of Education, Northwest Normal University, Lanzhou, Gansu 730070)

Abstract: An equaling difference method of linear function is deduced in detail and applied to the data processing of measuring electromotive force and internal resistance of electrical source, the measurement results are given. The characteristics of this method are discussed and corresponding teaching suggestion are put forward. The data processing method in the present textbooks is extended.

Key words: linear function; equaling difference method; electromotive force; internal resistance; data processing