

火箭发射过程中助推作用的研究

杜安 代雪峰 公卫江 陈肖慧

(东北大学理学院 辽宁 沈阳 110819)

(收稿日期:2017-01-01)

摘要:假设火箭发射过程中采用助推手段,我们计算了恒定力助推和弹簧力助推两种情况下火箭离开发射塔时的速度和经历的时间,比较了无助推情况下达到相同速度所需要的时间和飞行的高度,由此得到了助推可以节省燃料1%以上的结论.

关键词:火箭发射 助推力 火箭燃料

1 前言

运载火箭通过向后喷射气体产生反向推力将航天器送入太空.根据动量定理,反向推力的大小与气体的喷射速度和单位时间内喷出气体的质量有关,即反向推力为^[1,2]

$$F = -v_r \frac{dm}{dt} \quad (1)$$

所以,要提升火箭的推力,一个措施是增大火箭发动机喷嘴喷出气体的速度 v_r ,理论上可以达到 $5 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$,但由于燃料的燃烧效率和其他损失,实际上气体喷出速度只有理论值的一半左右,即 $2 \sim 3 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ ^[2,3].另一个措施是提高单位时间内喷射气体的质量,可以通过增加喷口数量(捆绑式火箭)来实现,但是也有限.利用这样的推力,在不考虑重力的情况下,当燃料燃尽时火箭获得的速度可以表示为^[4,5]

$$v_k = v_0 + v_r \ln \frac{m_0}{m_k} \quad (2)$$

其中 v_0 和 m_0 是火箭的初始速度和质量, m_k 是燃料燃尽时火箭外壳和其他附属设备的总质量.上式称为齐奥尔科夫斯基公式,而 $\frac{m_0}{m_k}$ 通常被称为质量比.对于单级火箭,质量比不能做到太大,一般在10左右,所以利用单级火箭达不到第一宇宙速度,而常常需要采用二级或二级以上火箭来发射航天器.若考虑重力作用,火箭获得的速度还要受到很大影响^[6].

在航空母舰上应用助推器可以在短时间内将飞机加速,将之弹射升空.那么可否将助推原理应用于火箭发射,助推效果如何,本文采用恒定力和弹性力两种助推方式,研究其对火箭发射速率的影响.

2 火箭发射过程理论分析

有助推力的情况下在重力场中发射火箭,如图1所示.



图1 竖直发射火箭示意图

开始时 $t=0$,火箭的质量是 m_0 ,速度 $v_0=0$.任意时刻 t ,火箭的质量是 m ,速度是 v .再经过 dt 时间到 $t+dt$ 时刻,火箭的质量变为 $m+dm$,速度变为 $v+dv$,向下以相对火箭速率 v_r 喷出了 $-dm$ 质量气体.在此过程中火箭受到向下重力和向上助推力作用.若取向上为正方向,不考虑空气阻力的情况下,体系遵循的动量定理为

$$(m+dm)(v+dv) + (-dm)(v-v_r) - mv = (F-G)dt \quad (3)$$

其中 F 是助推力.忽略二阶小量,方程变为

$$mdv + v_r dm = (F - mg) dt$$

即

$$F - mg - v_r \frac{dm}{dt} = m \frac{dv}{dt} \quad (4)$$

其中 $-\frac{dm}{dt}$ 为火箭燃料燃烧速率. 由式(4)可知, 火

箭喷出气体产生的推力为 $-v_r \frac{dm}{dt}$.

设火箭质量随时间按照指数规律减少, 即 $m = m_0 e^{-\alpha t}$, 其中 m_0 是火箭发射前的质量, α 是正常数, 描述火箭燃料消耗的快慢^[5,6]. 则有

$$\frac{dm}{dt} = -\alpha m \quad (5)$$

$$\frac{dv}{dt} = \alpha v_r - g + \frac{F}{m} \quad (6)$$

由此可知, 在有助推的情况下, 只有当 $\alpha v_r - g > 0$ 时火箭才会竖直上升. 我们讨论两种助推方式下的火箭发射情况.

(1) 助推力是恒定力情况. 比如通过滑轮系统在火箭发射时施加一个恒定助推力 F_1 , 通过微积分运算, 火箭获得的速度和上升的高度分别为

$$v = (\alpha v_r - g)t + \frac{F_1}{\alpha m_0} (e^{\alpha t} - 1) \quad (7)$$

$$z = \frac{1}{2} (\alpha v_r - g)t^2 + \frac{F_1}{\alpha m_0} \left[\frac{1}{\alpha} (e^{\alpha t} - 1) - t \right] \quad (8)$$

(2) 助推力是弹簧力的情况. 设火箭在没有启动之前弹簧处于最大压缩状态, 火箭脱离发射塔弹簧处于自由状态, 那么火箭在发射过程中所受到的助推力是

$$F_2 = \kappa(h - z) \quad (9)$$

其中, κ 是弹簧的劲度系数, h 是发射塔的高度, z 是火箭上升的高度. 可见最大弹力为

$$F_{2\max} = \kappa h$$

则

$$\frac{dv}{dt} = \alpha v_r - g + \frac{\kappa(h - z)}{m_0} e^{\alpha t} \quad (10)$$

这里 $v = \frac{dz}{dt}$, 所以上式是关于 z 的二阶微分方程, 可以通过数值方法计算出不同时刻的火箭速度 v 和上升的高度 z .

3 结果分析和讨论

长征五号系列运载火箭, 箭体长度 56.97 m, 起飞质量 867 t, 起飞推力 10 565 kN. 取喷射速度

$$v_r = 2.5 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

那么

$$\alpha = \frac{F_{\text{推}}}{m v_r} \approx 0.005 \text{ s}^{-1}$$

即经过 200 s 火箭的质量变为原始质量的 e^{-1} 倍, 燃料消耗得很快. 设火箭发射塔的高度 $h = 100 \text{ m}$, 也是施加助推力的距离. 根据上面的公式, 可以计算出不同助推力下火箭离开发射塔的速率和所需时间. 表 1 和表 2 给出了不同助推力下的计算结果.

表 1 助推力为恒定力情况下火箭离开发射塔的速率和所需时间

助推力 F_1	离塔速率 / ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$)	所需时间 t_1 / s
$m_0 g$	50.26	3.990
$m_0 g / 2$	39.20	5.115
$m_0 g / 3$	34.73	5.774
$m_0 g / 6$	29.57	6.779
0	23.24	8.607

表 2 助推力是弹簧力情况下火箭离开发射塔的速率和所需时间

最大弹力 $F_{2\max}$	离塔速率 / ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$)	所需时间 t_1 / s
$m_0 g$	39.13	4.312
$m_0 g / 2$	32.20	5.443
$m_0 g / 3$	29.53	6.080
$m_0 g / 6$	26.58	7.016
0	23.24	8.607

从表 1 和 2 可以看出, 与无助推情况相比较, 有助推情况下火箭脱离发射塔需要的时间更短, 获得的速率更大.

我们还可以比较火箭在无助推情况下, 达到有助推情况下离开发射塔速率需要的时间和上升的高度. 再利用 $m = m_0 e^{-\alpha t}$ 可以推算出利用助推可以节省的燃料. 有助推与无助推相比较, 节省的燃料与发射质量之比为

$$\frac{m_1 - m_2}{m_0} = e^{-\alpha t_1} - e^{-\alpha t_2} \quad (11)$$

其中 t_1 和 m_1 分别代表有助推情况下火箭离开发射

塔所需时间和对应的质量, t_2 和 m_2 分别代表火箭在无助推情况下达到有助推情况下离开发射塔速率所需时间和对应的质量. 此式也是火箭无助推时达到有助推时离开发射塔速率多消耗的燃料与发射前质量之比, 如表 3 是火箭在无助推情况下, 达到恒定助推力下离开发射塔速率需要的时间、上升的高度以及多消耗的燃料与发射前质量之比.

表 3 达到恒定助推力

助推力 F_1	需要时间 t_2/s	上升高度 /m	多消耗燃料 /%
$m_0 g$	18.62	467.8	6.915
$m_0 g/2$	14.52	284.6	4.478
$m_0 g/3$	12.86	223.4	3.382
$m_0 g/6$	10.95	161.9	1.995

表 4 是火箭在无助推情况下, 达到弹簧助推力下离开发射塔速率需要的时间、上升的高度以及多消耗的燃料与发射前质量之比.

表 4 达到弹簧助推力

最大弹力 $F_{2\max}$	需要时间 t_2/s	上升高度 /m	多消耗燃料 /%
$m_0 g$	14.49	283.6	4.856
$m_0 g/2$	11.93	192.0	3.106
$m_0 g/3$	10.94	161.5	2.329
$m_0 g/6$	9.844	130.8	1.356

从表 3 和 4 可以看出, 利用助推可以少用 1% 以上的燃料火箭就可以达到无助情况下获得的发射速度. 仍然以长征五号系列运载火箭为例, 虽然火箭起

飞质量达 867 t, 但是它的最大运载能力只有 23 t, 绝大部分质量都集中在燃料上. 通过应用助推发射, 可以减少很多火箭燃料.

以上只比较了达到相同发射速度的情况, 而没有考虑火箭运行的高度. 由于利用火箭发射航天器使之进入轨道关键条件是速度, 只要速度达到第一宇宙速度的大小 $7.9 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ 时, 就可以实现航天器的在轨绕地飞行, 而且一般情况下航天器的近地轨道都在 200 km 以上, 所以发射时高度的小差别 (500 m 以下) 可以忽略不计.

由以上计算可以看出, 在火箭发射过程中使用助推手段, 可以明显节省火箭燃料, 增加火箭的运载能力. 本文只是理论上的分析和预测, 至于技术上的可行性和经济上的合理性还需要探讨.

参考文献

- 1 张汉壮, 王文全主编. 力学(第三版). 北京: 高等教育出版社, 2015. 105
- 2 王少杰, 顾牡, 吴天刚. 新编基础物理学上册(第二版). 北京: 科学出版社, 2014. 34
- 3 赵凯华, 罗蔚茵. 新概念物理教程·力学(第二版). 北京: 高等教育出版社, 2004. 49
- 4 同济大学理论力学教研室编. 理论力学(下册). 上海: 同济大学出版社, 1990. 11, 87
- 5 郑永玲, 贾起民, 方小敏. 力学(第二版). 北京: 高等教育出版社, 北京 2002. 121
- 6 A·II·马尔契夫著. 理论力学(第三版). 李俊峰译. 北京: 高等教育出版社, 2006. 180

Study on the Boosting Effect in Rocket Launching Process

Du An Dai Xuefeng Gong Weijiang Chen Xiaohui

(College of Sciences, Northeastern University, Shenyang, Liaoning 110819)

Abstract: A booster is supposed to used in rocket launching process, the velocities and the used times for rocket leaving the launching tower are calculated for the two cases of constant force boosting and spring force boosting. Comparing the time and the height to the case without the booster on the condition getting the same value of the velocities, we find that the fuel can be saved about more than one percent of the emission quality with the help of the booster.

Key words: rocket launching; boost force; rocket fuel