

教育技术应用

基于 VB 仿真模拟二维弹簧双振子的运动轨迹^{*}

谢 妙 金盈楠 王 超 陈英才

(台州学院物理系 浙江 台州 318000)

(收稿日期:2017-01-14)

摘 要:基于 VB 语言开发出模拟二维平面内弹簧双振子系统运动的仿真软件. 在任意给定系统参数条件下, 利用该软件可分别绘出振子在实验室参考系和质心参考系中的动态轨迹, 从而形象直观地显现弹簧双振子系统在二维平面内的运动规律.

关键词:弹簧双振子 VB 模拟 轨迹

1 引言

弹簧双振子系统, 即由两个振子和一个弹簧组成的力学系统, 是中学以及大学物理中动量守恒和机械能守恒部分常见的力学模型. 目前关于弹簧双振子的题目或研究多局限于一维运动, 这显然不利于学生对该系统运动的全面认识^[1~8].

本文基于 Visual Basic 开发设计出模拟二维弹簧双振子运动的可执行程序, 利用该软件可直观模拟演示任意参数条件下弹簧双振子系统在二维平面内的运动.

2 二维弹簧双振子模型及模拟仿真的实现

2.1 理论模型

二维弹簧双振子模型如图 1 所示, 即在光滑的水平面内, 质量为 m_1 的小球 1 和质量为 m_2 的小球 2 通过劲度系数为 κ , 自然长度为 l_0 的弹簧连在一起. 在一定初始位置和速度条件下, 系统可在水平面内运动. 当弹簧出现拉伸或压缩形变时, 两个小球均受到弹簧弹力作用. 假定 t 时刻两个小球间的距离为 r , 则弹簧弹力大小为

$$F = -\kappa(r - l_0)$$

小球 1 受到的弹簧作用力为

$$\mathbf{F}_1 = -F\mathbf{r}_{12}$$

小球 2 受到的弹簧作用力为

$$\mathbf{F}_2 = F\mathbf{r}_{12}$$

其中 $\mathbf{r}_{12}$ 表示由小球 1 指向小球 2 的单位矢量. 根据牛顿第二定律可得到两个小球的加速度, 即

$$\mathbf{a}_1 = \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} = \frac{\mathbf{F}_1}{m_1} \quad (1)$$

$$\mathbf{a}_2 = \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} = \frac{\mathbf{F}_2}{m_2} \quad (2)$$

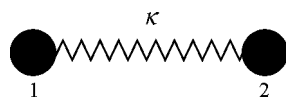


图 1 二维弹簧双振子模型图

理论上, 在任意给定初始位置和速度条件下通过对方程(1)和(2)进行积分求解可以得到两个小球的速度随时间的变化关系 $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1(t)$ 和 $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2(t)$, 通过再次积分则可以得到两个小球空间位置随时间的变化关系 $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(t)$ 和 $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_2(t)$. 但是由于两个小球的运动相互影响, 在大多数条件下我们很难求出两个小球空间位置随时间的变化的解析解.

2.2 小球位置和速度的数值求解

本文采用速度 Verlet 算法迭代求解并获得两个

^{*} 台州市 2016 年大学生科技创新项目资助课题.

小球的位矢($\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$) 和速度($\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$) 随时间的变化,具体如下:首先,根据 t 时刻两个小球的位置、速度和加速度,求 $t + \Delta t$ (这里的 Δt 为迭代时间步长)时刻两个小球的位置,即

$$\boldsymbol{r}_1(t + \Delta t) = \boldsymbol{r}_1(t) + \boldsymbol{v}_1(t)\Delta t + \frac{1}{2}\boldsymbol{a}_1(t)\Delta t^2 \quad (3)$$

$$\boldsymbol{r}_2(t + \Delta t) = \boldsymbol{r}_2(t) + \boldsymbol{v}_2(t)\Delta t + \frac{1}{2}\boldsymbol{a}_2(t)\Delta t^2 \quad (4)$$

然后,利用 $\boldsymbol{r}_1(t + \Delta t)$ 和 $\boldsymbol{r}_2(t + \Delta t)$ 求解两个小球间的距离 $r(t + \Delta t)$ 和弹簧弹力大小 $F(t + \Delta t)$,进而得到小球 1 受到的弹力 $\boldsymbol{F}_1(t + \Delta t) = -F(t + \Delta t)\boldsymbol{r}_{12}$ 以及小球 2 受到的弹力 $\boldsymbol{F}_2(t + \Delta t) = F(t + \Delta t)\boldsymbol{r}_{12}$,并由此求得 $t + \Delta t$ 时刻两个小球的加速度 $\boldsymbol{a}_1(t + \Delta t)$ 和 $\boldsymbol{a}_2(t + \Delta t)$,即

$$\boldsymbol{a}_1(t + \Delta t) = \frac{\boldsymbol{F}_1(t + \Delta t)}{m_1} \quad (5)$$

$$\boldsymbol{a}_2(t + \Delta t) = \frac{\boldsymbol{F}_2(t + \Delta t)}{m_2} \quad (6)$$

最后,由 t 时刻和 $t + \Delta t$ 时刻小球的加速度求解 $t + \Delta t$ 时刻小球的速度,即

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1(t + \Delta t) = \\ \boldsymbol{v}_1(t) + \frac{1}{2}[\boldsymbol{a}_1(t) + \boldsymbol{a}_1(t + \Delta t)]\Delta t \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_2(t + \Delta t) = \\ \boldsymbol{v}_2(t) + \frac{1}{2}[\boldsymbol{a}_2(t) + \boldsymbol{a}_2(t + \Delta t)]\Delta t \end{aligned} \quad (8)$$

在该迭代算法中,迭代时间步长 Δt 的大小直接决定数值计算的精度. Δt 越小,计算结果越准确,但模拟所耗费的时间也越长. 本文选取 $\Delta t = 0.000\ 5$ s.

2.3 基于 VB 语言的程序设计

软件程序分窗体和模块两部分. 软件将各种操作均集中在一个窗体内,其中包含参数设置、命令按钮和图形输出 3 个部分,如图 2 所示. 参数设置部分包含弹簧劲度系数、两个振子(小球)的质量、初始位置、初始速度以及模拟运动时间等参数设置;命令按钮部分包含系统生成、开始运动和结束程序 3 个按钮;图形输出部分包含实物图、实验室参考系轨迹图和质心系轨迹图 3 个图形区域. 软件程序的执行

按照一定的流程进行设计,程序流程图如图 3 所示. 需要说明的是,为了简化程序编写,本软件输出的实物图中的弹簧用粗实线代替.

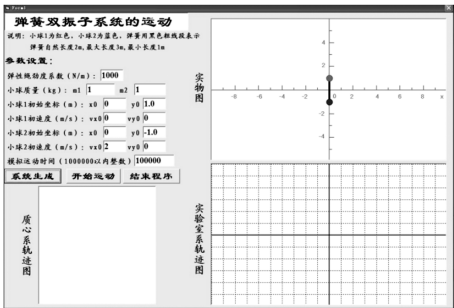


图2 窗体界面

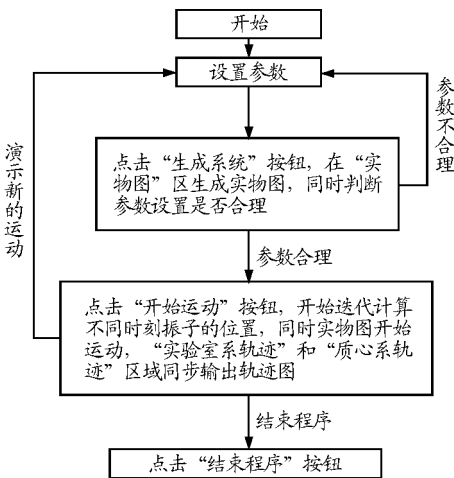


图3 程序流程图

3 演示结果举例

作为例子,我们设定:弹簧劲度系数为 5,小球 1 质量为 1,初始坐标为 $(-10,1)$ 、初始速度为 $(0,1)$,小球 2 质量为 0.5,初始坐标为 $(-10,-1)$ 、初始速度为 $(0.5,-2)$,并模拟演示系统在的运动轨迹(以上各参数单位均为国际单位). 在上述参数条件下,振子系统整体(即质心)向 x 轴正向缓慢运动,同时每个小球相对质心又不停的运动. 图 4 和图 5 分别给出了对应参数条件下两个小球在实验室参考系以及质心参考系中的轨迹图形,其中浅色线对应小球 1 的轨迹,深色线对应小球 2 的轨迹. 由图 4 可以直观看出,弹簧双振子系统在给定参数条件下的运动是非常复杂的,但就整个运动轨迹而言,系统的运动又存在一定的规律性. 这种规律性在质心参考系轨

迹图中有更明显的体现,如图 5 所示.在质心系中,两个小球均绕质心做圆周振动,即绕质心转动和相对质心振动同时进行.

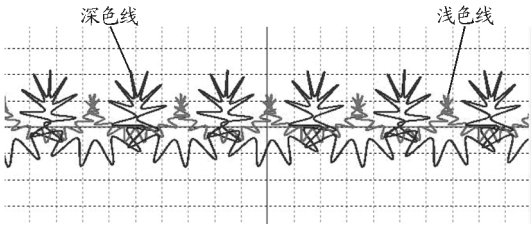


图 4 实验室系轨迹图

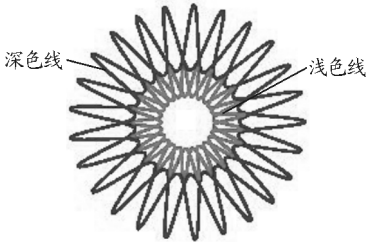


图 5 质心系轨迹图

4 结论

弹簧双振子系统是力学中的常见模型.本文基于 VB 语言开发出模拟二维平面内弹簧双振子系统运动的仿真软件.在任意给定系统参数条件下,利用

该软件可分别绘出两个振子在实验室参考系和质心参考系中的动态轨迹,形象直观地显现双振子系统的运动规律.将其用于物理课堂教学,可使学生加深对弹簧双振子系统的认识,使物理知识化抽象为生动、形象进而达到良好的课堂教学效果.

参考文献

- 1 张佩华. 弹簧双振子水平运动模型的建立及应用. 贵州大学学报(自然科学版),2004(7):9 ~ 11
- 2 殷召连. 弹簧双振子怎样运动. 中学物理教学参考, 2000(6):26 ~ 27
- 3 顾士明. 恒力作用下的弹簧双振子的运动. 中学物理, 2012(7):74 ~ 76
- 4 黄书鹏. 物理模型在弹簧双振子问题中的应用. 物理教师,2009(1):7 ~ 9
- 5 王建锋,魏俊泉,等. 弹簧双振子模型在物理竞赛中的应用. 物理教学探讨,2006(9):45 ~ 51
- 6 王化银,徐杰. 例谈弹簧双振子问题的求解. 中学物理教学参考,2003(7):35 ~ 36
- 7 陈卫国,余雷,等. 坐标法解弹簧双振子模型. 上饶师范学院学报,2008(6):33 ~ 38
- 8 邱刚. 基于质心参考系的“双振子”运动问题的研究. 物理教师,2014(2):57 ~ 59

Simulation on the Movement Trajectory of Spring Double Oscillators in 2D Space Based on VB

Xie Miao Jin Yingnan Wang Chao Chen Yingcai
(Physics Department of Taizhou University, Taizhou, Zhejiang 318000)

Abstract: One software for simulating the movement of spring double oscillators in 2D space is developed based on VB, which can display the movement trajectories of the oscillators in then laboratory reference frame and the center - of - mass reference frame at the same time under any given parameter condition, and can exhibit picturesquely and visually the dynamics of the spring double oscillators in 2D space.

Key words: spring double oscillators; VB; simulation; trajectory