均匀带电矩形线圈的电势和电场计算

张　驰

（吉林大学电子科学与工程学院　吉林 长春　130012）

（收稿日期：2017－04－04）

摘　要：利用点电荷的电势和电势叠加原理，得到了均匀带电矩形线圈空间电势分布的表达式；再根据场强与电势梯度的关系，推导出均匀带电矩形线圈空间电场分布的表达式.

关键词：均匀带电矩形线圈　电势　电场

有限带电体的电势分布和场强分布是电磁学中的重要内容. 文献[1]用一段均匀带电细棒的场强和场强叠加原理研究了均匀带电正方形线圈的空间电场分布. 本文利用点电荷的电势和电势叠加原理[2]，得到了均匀带电矩形线圈的空间电势分布，再根据场强与电势梯度的关系[2]，推导出均匀带电矩形线圈的空间电场分布. 方法简单，结果明确，希望本文可以帮助同学们更好地理解和掌握点电荷的电势、电势叠加原理和场强与电势梯度的关系.

1　电势分布

如图 1 所示，有一带电荷量为 Q 的均匀带电矩形线圈，电荷线密度为 λ，AB 边长为 $2a$，BC 边长为 $2b$. 建立如图 1 所示的三维直角坐标系 $Oxyz$，矩形的中心点为坐标原点，Ox 轴平行于 AB 边，Oy 轴平行于 CB 边. 取无穷远处为零电势参考点，则均匀带电的 AB 边在任意场点 $P(x,y,z)$ 产生的电势为

$$U_{AB}=\int_{-a}^{a}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\,\mathrm{d}x'}{\sqrt{(x-x')^2+(y-b)^2+z^2}}$$

利用积分公式

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}=\ln\frac{x_2+\sqrt{x_2^2+a^2}}{x_1+\sqrt{x_1^2+a^2}}$$

得

$$U_{AB}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{x+a+\sqrt{(x+a)^2+(y-b)^2+z^2}}{x-a+\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+z^2}} \tag{1}$$

同理可得

$$U_{BC}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{y+b+\sqrt{(x-a)^2+(y+b)^2+z^2}}{y-b+\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+z^2}} \tag{2}$$

$$U_{CD}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{x+a+\sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2+z^2}}{x-a+\sqrt{(x-a)^2+(y+b)^2+z^2}} \tag{3}$$

$$U_{DA}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{y+b+\sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2+z^2}}{y-b+\sqrt{(x+a)^2+(y-b)^2+z^2}} \tag{4}$$

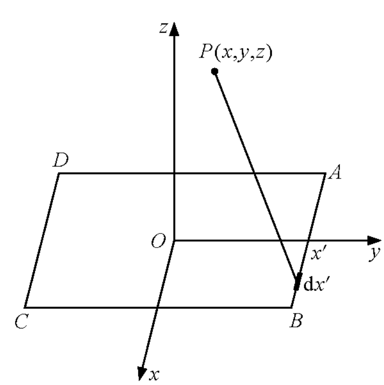

图 1　均匀带电线圈的电势分布

所以，将式(1)～(4)代入下式中就可得到均匀带电矩形线圈在任意场点 $P(x,y,z)$ 产生的电势，即

$$U_P=U_{AB}+U_{BC}+U_{CD}+U_{DA} \tag{5}$$

假设 $a=b$，$x=0$，$y=0$，且有 $z\gg a(b)$，利用

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot 4}x^2+\cdots$$

作者简介：张驰（1997－　），男，在读本科生.

忽略高阶无穷小,由式(1) 可知

$$U_{AB} \approx \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{1+\dfrac{a}{z}}{1-\dfrac{a}{z}}$$

再利用

$$e^{\alpha}=1+\alpha+\frac{1}{2!}\alpha^2+\cdots$$

并忽略高阶无穷小,可得

$$U_{AB} \approx \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2a}{z}$$

所以

$$U_P \approx 4\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2a}{z}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 z}$$

此结果与点电荷的电势公式一致.

2 电场分布

根据场强与电势梯度的关系,可得到均匀带电矩形线圈在任意场点 $P(x,y,z)$ 产生的场强为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_P = -\nabla U_P = \\ -\left(\frac{\partial U_P}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial U_P}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial U_P}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)= \\ -\left(\frac{\partial U_{AB}}{\partial x}+\frac{\partial U_{BC}}{\partial x}+\frac{\partial U_{CD}}{\partial x}+\frac{\partial U_{DA}}{\partial x}\right)\boldsymbol{i}- \\ \left(\frac{\partial U_{AB}}{\partial y}+\frac{\partial U_{BC}}{\partial y}+\frac{\partial U_{CD}}{\partial y}+\frac{\partial U_{DA}}{\partial y}\right)\boldsymbol{j}- \\ \left(\frac{\partial U_{AB}}{\partial z}+\frac{\partial U_{BC}}{\partial z}+\frac{\partial U_{CD}}{\partial z}+\frac{\partial U_{DA}}{\partial z}\right)\boldsymbol{k}\end{aligned} \tag{6}$$

其中

$$\frac{\partial U_P}{\partial x}=\frac{\partial U_{AB}}{\partial x}+\frac{\partial U_{BC}}{\partial x}+\frac{\partial U_{CD}}{\partial x}+\frac{\partial U_{DA}}{\partial x}$$

$$\frac{\partial U_P}{\partial y}=\frac{\partial U_{AB}}{\partial y}+\frac{\partial U_{BC}}{\partial y}+\frac{\partial U_{CD}}{\partial y}+\frac{\partial U_{DA}}{\partial y}$$

$$\frac{\partial U_P}{\partial z}=\frac{\partial U_{AB}}{\partial z}+\frac{\partial U_{BC}}{\partial z}+\frac{\partial U_{CD}}{\partial z}+\frac{\partial U_{DA}}{\partial z}$$

由式(1) ~ (4) 可得

$$\frac{\partial U_{AB}}{\partial x}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left[\frac{1+\dfrac{x+a}{\sqrt{(x+a)^2+(y-b)^2+z^2}}}{x+a+\sqrt{(x+a)^2+(y-b)^2+z^2}}-\frac{1+\dfrac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+z^2}}}{x-a+\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+z^2}}\right] \tag{7}$$

$$\frac{\partial U_{BC}}{\partial x}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left[\frac{\dfrac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2+(y+b)^2+z^2}}}{y+b+\sqrt{(x-a)^2+(y+b)^2+z^2}}-\frac{\dfrac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+z^2}}}{y-b+\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+z^2}}\right] \tag{8}$$

$$\frac{\partial U_{CD}}{\partial x}=\pm\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left[\frac{1+\dfrac{x+a}{\sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2+z^2}}}{x+a+\sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2+z^2}}-\frac{1+\dfrac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2+(y+b)^2+z^2}}}{x-a+\sqrt{(x-a)^2+(y+b)^2+z^2}}\right] \tag{9}$$

(当 $|x|>a$ 时取“+”,当 $|x|\leqslant a$ 时取“—”)

$$\frac{\partial U_{DA}}{\partial x}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left[\frac{\dfrac{x+a}{\sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2+z^2}}}{y+b+\sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2+z^2}}-\frac{\dfrac{x+a}{\sqrt{(x+a)^2+(y-b)^2+z^2}}}{y-b+\sqrt{(x+a)^2+(y-b)^2+z^2}}\right] \tag{10}$$

$$\frac{\partial U_{AB}}{\partial y}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left[\frac{\dfrac{y-b}{\sqrt{(x+a)^2+(y-b)^2+z^2}}}{x+a+\sqrt{(x+a)^2+(y-b)^2+z^2}}-\frac{\dfrac{y-b}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+z^2}}}{x-a+\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+z^2}}\right] \tag{11}$$

$$\frac{\partial U_{BC}}{\partial y}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left[\frac{1+\dfrac{y+b}{\sqrt{(x-a)^2+(y+b)^2+z^2}}}{y+b+\sqrt{(x-a)^2+(y+b)^2+z^2}}-\frac{1+\dfrac{y-b}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+z^2}}}{y-b+\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+z^2}}\right] \tag{12}$$

$$\frac{\partial U_{CD}}{\partial y}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\cdot$$

$$\left[\frac{\dfrac{y+b}{\sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2+z^2}}}{x+a+\sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2+z^2}}-\frac{\dfrac{y+b}{\sqrt{(x-a)^2+(y+b)^2+z^2}}}{x-a+\sqrt{(x-a)^2+(y+b)^2+z^2}}\right] \qquad (13)$$

$$\frac{\partial U_{DA}}{\partial y}=\pm\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\cdot$$

$$\left[\frac{1+\dfrac{y+b}{\sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2+z^2}}}{y+b+\sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2+z^2}}-\frac{1+\dfrac{y-b}{\sqrt{(x+a)^2+(y-b)^2+z^2}}}{y-b+\sqrt{(x+a)^2+(y-b)^2+z^2}}\right] \qquad (14)$$

(当 $|y|>b$ 时取“+”，当 $|y|\leqslant b$ 时取“−”)

$$\frac{\partial U_{AB}}{\partial z}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\cdot$$

$$\left[\frac{\dfrac{z}{\sqrt{(x+a)^2+(y-b)^2+z^2}}}{x+a+\sqrt{(x+a)^2+(y-b)^2+z^2}}-\frac{\dfrac{z}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+z^2}}}{x-a+\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+z^2}}\right] \qquad (15)$$

$$\frac{\partial U_{BC}}{\partial z}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\cdot$$

$$\left[\frac{\dfrac{z}{\sqrt{(x-a)^2+(y+b)^2+z^2}}}{y+b+\sqrt{(x-a)^2+(y+b)^2+z^2}}-\frac{\dfrac{z}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+z^2}}}{y-b+\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+z^2}}\right] \qquad (16)$$

$$\frac{\partial U_{CD}}{\partial z}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\cdot$$

$$\left[\frac{\dfrac{z}{\sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2+z^2}}}{x+a+\sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2+z^2}}-\frac{\dfrac{z}{\sqrt{(x-a)^2+(y+b)^2+z^2}}}{x-a+\sqrt{(x-a)^2+(y+b)^2+z^2}}\right] \qquad (17)$$

$$\frac{\partial U_{DA}}{\partial z}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\cdot$$

$$\left[\frac{\dfrac{z}{\sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2+z^2}}}{y+b+\sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2+z^2}}-\frac{\dfrac{z}{\sqrt{(x+a)^2+(y-b)^2+z^2}}}{y-b+\sqrt{(x+a)^2+(y-b)^2+z^2}}\right] \qquad (18)$$

将式(7)～(18)代入式(6)就可以得到均匀带电矩形线圈在任意场点 $P(x,y,z)$ 产生的场强 $\boldsymbol{E}_P$.

当 $x=0$，$y=0$，且 z 远大于 a 和 b 时，有

$$E_x=0 \qquad E_y=0$$

$$E_z\approx\frac{\lambda(4a+4b)}{4\pi\varepsilon_0 z^2}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 z^2}$$

同理，当 $z=0$，$y=0$，且 x 远大于 a 和 b 时，有

$$E_z=0 \qquad E_y=0$$

$$E_x\approx\frac{\lambda(4a+4b)}{4\pi\varepsilon_0 x^2}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$$

当 $x=0$，$z=0$，且 y 远大于 a 和 b 时，有

$$E_x=0 \qquad E_z=0$$

$$E_y\approx\frac{\lambda(4a+4b)}{4\pi\varepsilon_0 y^2}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 y^2}$$

这些结果与点电荷的场强公式一致，说明均匀带电的矩形线圈相对于无穷远处的 P 点来说，可以看做一个点电荷.

3　结论

综上所述，本文对均匀带电矩形线圈的空间电势分布和空间电场分布进行了求解. 利用点电荷的电势公式和电势叠加原理，得到了均匀带电矩形线圈空间电势分布的表达式；再根据场强与电势梯度的关系，推导出均匀带电矩形线圈空间电场分布的表达式. 当场点 P 到线圈的距离远大于线圈本身的尺寸时，P 点的电势和场强分别趋近于点电荷的电势和场强. 希望本文的计算过程和结果有助于同学们更好地理解和掌握点电荷的电势、电势叠加原理以及场强与电势梯度的关系.

参 考 文 献

1　樊雅平，黄生学. 均匀带电正方形线圈的空间电场分布. 河池学院学报，2009，29(5)：29～32

2　费恩曼，莱顿，桑兹. 费恩曼物理学讲义(第 2 卷). 上海：上海科学技术出版社，2013. 44～47

(下转第 24 页)