

一道变质量力学问题的分析与讨论

姚 杏 朱海明

(安徽师范大学附属中学 安徽 芜湖 241000)

(收稿日期:2017-04-08)

摘要:对一道求解变质量体系中力学问题的解答进行了分析,发现解答过程不是很完整.文中给出了一些必要的补充和说明,并利用动量定理对变质量体系中受力突变问题进行了分析和解释.

关键词:变质量 柔软绳索 突变

1 引言

动量定理是质点及质点系动力学的普遍定理之一,在牛顿力学计算中有着广泛的应用,它在惯性系中的微分形式表达式为

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (1)$$

它表明系统总动量对时间的一阶变化率等于外界对系统施加的外力的矢量和.动量定理的研究对象比较广泛,可以是单个质点,也可以是质点系,它的应用范围也很广泛.如,恒力情形、变力情形等,尤其是对解决打击、碰撞、变质量等问题时,动量定理要比牛顿定律方便得多.

本文对教材中一道求解变质量体系中力学问题的解答进行了分析,发现解答过程不是很完整.文中给出了一些必要的补充,并利用动量定理对变质量体系中受力突变问题进行了分析和解释.

2 原题及解析^[1]

【题目】如图1所示,单位长度质量为 ρ_l 的柔软绳索盘放在水平台面上.用手将绳索的一端以恒定速率 v_0 向上提起,求当提起高度为 x 时手的拉力.

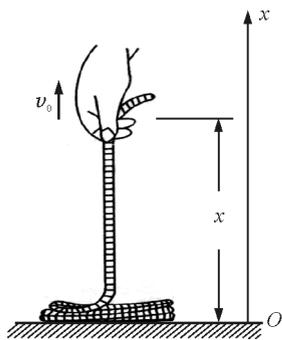


图1 题目

解析:以整根绳索为体系,设其长为 l ,它共受到3个力:重力 $\rho_l l g$,台面支承力 \mathbf{F}_N 和手的拉力 \mathbf{F} 在这3个力的作用下,体系的动量在不断变化.由体系动量定理可知,外力矢量和应等于体系动量的变化率.现在体系动量只有竖直方向分量,取 x 轴的方向竖直向上(坐标原点在地面上).

在 t 时刻,当绳索提起 x 时体系的动量为

$$p(t) = \rho_l x v_0 \quad (2)$$

在 $t + dt$ 时刻,当绳索提起 $x + dx$ 时体系的动量为

$$p(t + dt) = \rho_l (x + dx) v_0 \quad (3)$$

根据体系动量定理有

$$(F + F_N - \rho_l l g) dt = p(t + dt) - P(t) = \rho_l v_0 dx \quad (4)$$

注意到

作者简介:姚杏(2000-),女,在读高中生.

指导教师:朱海明(1985-),男,主要从事物理教学工作.

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \quad (5)$$

由于绳索是柔软的, dx 这段绳索对剩在台上的绳索没有作用力, 因此, F_N 只与剩在台上的绳索质量有关, 即

$$F_N = \rho_l(l-x)g \quad (6)$$

因此得

$$F = \rho_l x g + \rho_l v_0^2 \quad (7)$$

关于这道题的解答, 有的教材利用质心运动定理求解, 也得出相同的结论^[2]. 另外, 一些网页上课件也应用了动量定理等方法得到与之相同结果.

3 “解析”中的问题分析与讨论

从解析中的式(2)中可以看出, $x \in [0, l]$. 可将 $x=l$ 代入式(7)可得

$$F = \rho_l l g + \rho_l v_0^2 \quad (8)$$

式(8)表示绳索刚好完全被提起时的拉力. 由于绳索匀速上升, 利用牛顿第二定律可直接得出此时的拉力为

$$F = \rho_l l g \quad (9)$$

比较(8)、(9)两式, 可以看出利用动量定理和牛顿定律解得的结果不一致, 究竟其原因是什么呢? 为此, 对上述解析过程作出进一步的分析.

解析中提到的式(5)是表示绳索的上升的速率. 仔细分析可知, $\frac{dx}{dt}$ 应该是反映提起绳索的长度对时间的变化率, 这种变化率大小并不完全等于绳索的上升速率. 当 $0 \leq x < l$ 时, 提起绳索的长度对时间的变化率等于绳索的上升速率, 于是有

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \quad (0 \leq x < l) \quad (10)$$

当 $x=l$ 时, 绳索的长度已达到最大值. 此时, 提起绳索的长度对时间的变化率应该等于零, 即绳索的质量对时间的变化率等于零, 于是有

$$\frac{dx}{dt} = 0 \quad (x=l) \quad (11)$$

将式(11)代入式(4), 并将 $x=l$ 代入式(6), 可解得

$$F = \rho_l l g \quad (12)$$

比较(9)、(11)两式, 可以看出利用动量定理和牛顿定律解得的结果完全一致. 考虑到 x 可大于 l . 当 $x > l$ 时, 利用牛顿第二定律可得到结果与式(12)相同, 则该道变质量力学试题的完整的解析结果可表示如下

$$F = \begin{cases} \rho_l x g + \rho_l v_0^2 & (0 \leq x < l) \\ \rho_l l g & (x \geq l) \end{cases} \quad (13)$$

从式(13)可明显看出拉力是位置的函数, 是个瞬态力, 但其大小是不连续的, 在 $x=l$ 处有个突变过程, 突变过程中力的大小改变了 $\rho_l v_0^2$.

4 瞬态力突变的原因

绳索上升的过程中, 受到重力、台面支承力和手的拉力 3 个力的作用, 其中台面支承力与留在台面上的绳索的重力是一对平衡力. 对于已被提起部分绳索受到手的拉力、自身的重力、还有即将被提起的绳索对它向下的拉力. 由于绳索被匀速提起, 则这 3 个力的矢量和为零. 根据式(13)可知, 绳索被部分提起时, 即将被提起的绳索对它向下的拉力大小为 $\rho_l v_0^2$. 此拉力大小也可由动量定理计算出来, 具体过程如下:

设台面上有一段绳索质量为 $\rho_l dx$ 即将被拉起, 动量的改变量为 $\rho_l v_0 dx$, 则由动量定理可得到这段绳索受到的拉力为

$$T = \frac{\rho_l v_0 dx}{dt} = \rho_l v_0^2 \quad (14)$$

根据前面的分析, 当绳索被完全提起时, 下面没有绳索了, $\frac{dx}{dt}$ 值为零, 这部分的作用力也为零, 这是绳索在匀速上升的过程手的拉力突变的唯一原因.

5 结论

在变质量体系, 必须关注质量变化规律, 质量对时间的变化率在质量达到最大值可能有个突变过程, 在计算变质量体系物体受到瞬态力时, 必须加以注意.

自行车稳定性问题的研究与诠释

黄绍书

(六盘水市第23中学 贵州 六盘水 553000)

蒋金团

(施甸县第一中学 云南 保山 678200)

(收稿日期:2017-05-25)

摘要:根据刚体转动的力矩平衡,从转动相对定点悬空的角度,给出自行车“转弯不倒”的约束关系,并由此剖析自行车在微小扰动情况下,能够自动恢复稳定的原因.最后,结合自行车转弯过程中的转动惯量及回转半径,给出自行车在“转弯不倒”条件下的最大角速度解析式.

关键词:自行车稳定性 转弯不倒 陀螺效应 力矩平衡 诠释

1 引言

自行车是最普及的大众简易交通工具,它的发明已有200多年.而对自行车稳定性问题的研究和讨论,同样具有悠久的历史.这方面已发表的科普文章近百篇,通过检索查阅近40年来的部分文献资料^[1~4],发现它们基本都是从动力学微分方程入手分析,而未离开流行上百年的离心力效应和陀螺效应的观点.

关于自行车稳定性问题的研究和讨论,从未停

止,并曾几度掀起热潮.1970年,英国一位化学家 Jones 对传统的陀螺效应产生怀疑^[5].于是,他设计一辆无陀螺效应的自行车,就是在普通自行车的前轮上并排安装一个同样大小但不接触地面的轮子,这一轮子与正常车轮反向转动时,即可消除陀螺效应. Jones 的这一实践表明,消除陀螺效应后的高速运动的自行车同样能够维持稳定.也就是说,陀螺效应对自行车的稳定性没有明显的影响.

2012年1月,美国科普杂志 Discover Magazine 评选了2011年全球100个顶尖科学故事.其中“自

参考文献

1 郑永令,等.力学(第二版).北京:高等教育出版社,2013

2 马文蔚.物理学(第五版).北京:高等教育出版社,2009

Analysis and Discussion on A Mechanics Issue about Variable Mass

Yao Yao Zhu Haiming

(High School Affiliated to Anhui Normal University, Wuhu, Anhui 241000)

Abstract: The key to a mechanics problem about variable mass is analyzed in this paper, and found that the solution process is not complete. This paper gives some necessary supplement and explanations, and the sudden change of force is analyzed and explained in variable mass system using the momentum theorem.

Key words: variable mass; soft rope; sudden change