利用速度图像巧解方波电场问题

郑　金
（凌源市职教中心　辽宁 朝阳　122500）

（收稿日期：2017－04－13）

摘　要：对有关带电粒子以初速度垂直于电场方向进入方波电场的曲线运动问题进行分析和拓展，探究这类疑难问题巧妙的解答方法.

关键词：方波电压　匀强电场　带电粒子　速度图像

当带电粒子以初速度平行于极板方向进入方波电场时，在垂直于电场方向做匀速直线运动，在平行于电场方向做交替的匀加速直线运动和匀减速直线运动. 若粒子刚离开电场时打在靶上，则可求最大偏转距离和速度.

【例题】如图 1 所示，上下放置的平行金属板 A 和 B 之间的距离为 d，极板长度为 l，在右端有一垂直于板的靶，在 A 和 B 板加上如图 2 所示的方波形电压，当 $t=0$ 时，A 板的电势比 B 板高. 现有由质量为 m，电荷量为 q 带正电的粒子组成的粒子束，从 AB 的中点 O 处以速度 $v_0=\dfrac{\sqrt{3}qU_0T}{3dm}$ 沿金属板的平行线 OO' 方向射入电场，所有粒子在两板间的飞行时间均为一个周期 T，不计重力影响. 求：

（1）粒子飞出电场时的位置到 O' 点的距离范围；

（2）当靶不存在时飞出电场的粒子束分布的宽度.

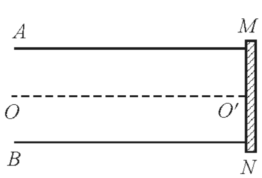

图 1　例题情境图

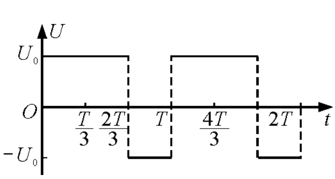

图 2　例题情境中两极板所加电压的图像

解析：（1）粒子飞出电场时的偏转距离跟粒子进入电场的时刻有关，若粒子在 $t=nT(n=0,1,2,\cdots)$ 时刻进入电场，则向下偏转的距离最大，在平行于电场方向上，带电粒子先正向加速运动的时间为 $\dfrac{2T}{3}$，再正向减速运动的时间为 $\dfrac{T}{3}$，画出粒子在一个周期内的速度图像如图 3 所示. 可知

$$v_1=a\ \frac{2T}{3}=\frac{2qU_0T}{3dm}$$

$$v_2=a\ \frac{T}{3}=\frac{qU_0T}{3dm}$$

所以图像面积即粒子向下偏转的距离为

$$s_1=\frac{v_1}{2}\ \frac{2T}{3}+\frac{v_1+v_2}{2}\ \frac{T}{3}=\frac{7qU_0T^2}{18dm}$$

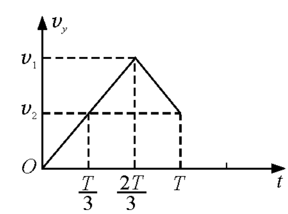

图 3　粒子在 $t=nT$ 时刻进入电场的 v_y-t 图像

若粒子在 $t=nT+\dfrac{2T}{3}$ 时刻进入电场，则向上偏转的距离最大，速度图像如图 4 所示，在平行于电场方向的总位移等于向上加速运动 $\dfrac{T}{3}$ 时发生的位移，即为左下方小直角三角形的面积

$$s_2=\frac{v_2}{2}\ \frac{T}{3}=\frac{qU_0T^2}{18dm}$$

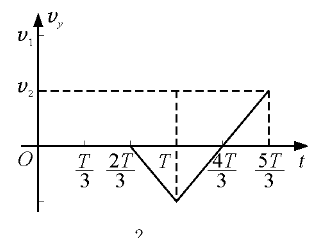

图 4　粒子在 $t=nT+\dfrac{2}{3}T$ 时刻进入电场的 v_y-t 图像

所以粒子落在靶上分布的范围是到中点 O' 下方和上方的最大距离分别为 $\dfrac{7qU_0T^2}{18dm}$ 和 $\dfrac{qU_0T^2}{18dm}$.

（2）通过画出带电粒子在一个周期内的速度图像，可知所有粒子经历一个周期离开电场时的横向

速度相同，由于初速度相同，则粒子飞出电场时的偏转角相同，其正切为 $\tan\theta=\frac{v_y}{v_x}=\frac{v_2}{v_0}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，得 $\theta=30^\circ$，可知飞出电场的粒子束分布的宽度为

$$D=(s_1+s_2)\cos 30^\circ=\frac{2\sqrt{3}qU_0T^2}{9dm}$$

点评：利用速度图像计算偏转距离比较直观. 关键是得出所有粒子经历一个周期时的横向速度相同的结论，则合速度的偏转角相同. 在计算图像总面积时，对于图 3，还可视为 7 个小直角三角形的面积之和；对于图 4，要注意对面积的正、负值取代数和.

拓展：对于上述例题，在两板加上如图 5 所示的方波电压，带正电粒子束从 AB 左端的中点 O 以某一速度沿 OO' 方向射入电场，其他条件不变，要使粒子能全部打在靶上，求：

（1）电压 U_0 应满足什么条件；

（2）粒子打在靶上的速度是多大.

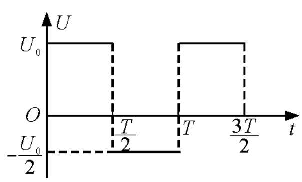

图 5　对例题进行拓展两极板所加电压的图像

解析：(1) 画出粒子在不同时刻进入电场时沿电场方向的速度在一个周期内的图像，如图 6 所示.

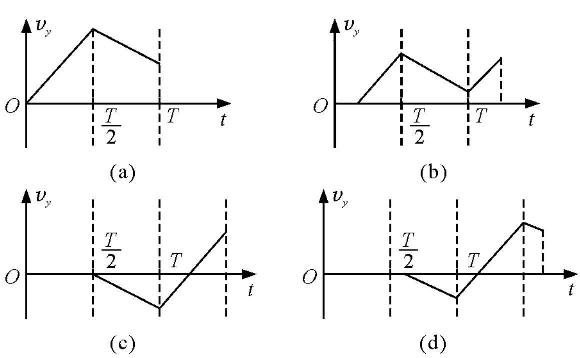

图 6　粒子在不同时刻进入电场的 v_y-t 图像

在交变电压正半周某时刻进入电场的粒子，速度图像的面积表示从点 O' 向下偏转的距离，只有在 $t=nT(n=0,1,2,\cdots)$ 时进入电场的粒子可达 O' 下方最远处，由图 6(a) 知，在前 $\frac{T}{2}$ 时间内

$$a_1=\frac{qU_0}{dm}\qquad s_1=\frac{1}{2}a_1\left(\frac{T}{2}\right)^2\qquad v_1=a_1\frac{T}{2}$$

在后 $\frac{T}{2}$ 时间内

$$a_2=\frac{qU_0}{2dm}\qquad s_2=v_1\frac{T}{2}-\frac{1}{2}a_2\left(\frac{T}{2}\right)^2$$

所以粒子向下偏转的总位移为

$$s=\frac{5qU_0T^2}{16dm}$$

在交变电压负半周某时刻进入电场中的粒子，由速度图像可知，只有在 $t=\frac{2n+1}{2}T(n=0,1,2\cdots)$ 时刻进入电场的粒子，可达点 O' 上方最远处，由图 6(c) 知其图像面积即总位移 $s'=\frac{s}{5}$ 小于向下偏转的总位移 s，要使粒子能全部打在靶上，应满足

$$s=\frac{5qU_0T^2}{16dm}<\frac{d}{2}$$

可得

$$U_0<\frac{8md^2}{5qT^2}$$

(2) 平行于极板方向的速度为 $v_0=\frac{l}{T}$，由速度图像可知所有粒子经历一个周期时的横向速度相等，因此垂直于极板的分速度为

$$v_y=a_2\frac{T}{2}=\frac{qU_0T}{4dm}$$

所以合速度为

$$v=\sqrt{v_0^2+v_y^2}=\sqrt{\frac{l^2}{T^2}+\frac{q^2U_0^2T^2}{16d^2m^2}}$$

点评：解题关键是画出粒子在不同时刻进入电场的运动过程对应的速度图像，通过观察来判断偏转距离的最大值，由此确定粒子进入电场的时刻. 对于图 6(a)，还可视为 5 个小直角三角形的面积之和.

虽然两种方波电场的图像不同，但粒子在其中运动都遵循同一规律，即若粒子束垂直于电场方向进入方波电场，则各粒子经历一个周期时的横向速度相同. 由 $F-t$ 图像可知，无论粒子何时进入电场，经历一个周期所对应的图像的面积都相同，即电场力的冲量相同，由动量定理可知横向速度相同，对于各种方波电场，若粒子在电场中经历整数个周期，则横向速度都相同. 总之，利用运动分解法和速度图像法可使这类方波电场中的曲线运动问题迎刃而解.

参 考 文 献

1　薛令喜. 谈速度图像的一种应用[J]. 中学物理，2000，18(4)：32

2　黄孝国. 浅谈高中物理中的电磁偏转问题[J]. 中学物理，2014，32(4)：48 ～ 50