

推导矩形边界磁场对各边导线产生的电动势

郑 金

(凌源市职教中心 辽宁 朝阳 122500)

(收稿日期:2017-05-24)

摘要:利用麦克斯韦电磁场理论和法拉第电磁感应定律以及微积分知识详细推导了矩形边界匀强磁场随时间均匀变化时产生的涡旋电场在边界线上的场强分量及其在矩形导线框各边中产生的电动势大小.

关键词:矩形边界磁场 涡旋电场 矩形线框 电动势

1 提出问题

对于有界磁场随时间均匀变化而产生感应电动势的问题,如果磁场边界为矩形,那么对位于边界的导线框各边分别产生的感应电动势的大小无法应用初等方法来求解,而需应用麦克斯韦电磁场理论和高等数学中的微积分知识进行定量推导.

鉴于文献[3]~[5]中的推导过程大都省略了数学微积分部分而显得不完整,下面通过对一道例题的解答进行详细推导和计算,使数学和物理结合得更加完美.

2 例题的错解与辨析

【例题】如图1所示,用均匀金属导线做成的正方形线框,边长为0.2 m,有一半放在匀强磁场边界,当磁感应强度以 $k=10\text{ T/s}$ 的变化率均匀增强时,线框的中线 MN 两端的电势差 U_{MN} 是多少?

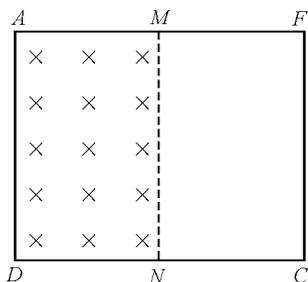


图1 例题题图

解法1:将左半部分电路 $MADN$ 视为电源,右半部分电路 $MFCN$ 视为外电路.磁场区域的面积为

$$S = 0.2 \times 0.1 \text{ m}^2 = 0.02 \text{ m}^2$$

由法拉第电磁感应定律可知感应电动势为

$$\epsilon = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = kS = 0.2 \text{ V}$$

由楞次定律可知感应电流沿逆时针方向,则 N 点的电势比 M 点的电势高.由于内、外电阻相等,即 $R=r$,可得路端电压为

$$U_{NM} = \epsilon - Ir = 0.5\epsilon = 0.1 \text{ V}$$

所以

$$U_{MN} = -0.1 \text{ V}$$

辨析:虽然线框右半部分导线 $MFCN$ 在磁场之外,但也产生感应电动势.因此算得电动势是整个回路的总电动势,不能作为左半部分电路的电动势.

解法2:原来回路的总电动势为 $\epsilon=0.2\text{ V}$.设想线框收缩为如图2所示的电路,而且总电阻保持不变.由于等效回路的总电动势跟原来的相等,那么等效导线 MN 与原来的导线 $MFCN$ 产生的感应电动势相等,其电阻为原来回路总电阻的一半.由于各边上的电动势与直导线的长度成正比,可知 MN 边的电动势为 $\epsilon_{MN} = \frac{2}{6}\epsilon$.视其为电源,由于内、外电阻相等,即 $R=r$,可知路端电压为

$$U_{MN} = \epsilon_{MN} - Ir = -\frac{1}{6}\epsilon \approx -0.033 \text{ V}$$

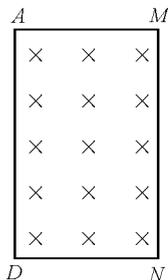


图2 图1的等效图

辨析:由于矩形边界的磁场产生的涡旋电场不

是匀强电场,那么在 AM, MN 两边各自产生的感应电动势并非与直导线的长度成正比,因此,不能认为长边产生的电动势等于短边产生的电动势的 2 倍.

该题实际是求解位于磁场边界的矩形线框各边在涡旋电场中产生的电动势,无法用初等方法解答,只能应用大学物理知识和高等数学知识进行推导.

3 圆形边界磁场随时间均匀变化时产生的涡旋电场

首先分析圆形边界磁场随时间均匀变化时在导线圆环中产生的感应电动势的大小,然后分析涡旋电场线的形状以及感应电动势与涡旋电场强度的关系式.如图 3 所示,匀强磁场边界圆的半径为 R ,磁感应强度的变化率为 $\frac{\Delta B}{\Delta t} = k$,在磁感线的横截面内有一个圆周半径为 r 的导线环,若 $r \geq R$,则由法拉第电磁感应定律可知感应电动势为

$$\epsilon = \frac{\Delta \phi}{\Delta t} = \pi R^2 \frac{\Delta B}{\Delta t} = \pi R^2 k$$

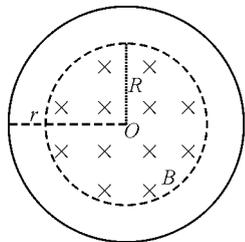


图 3 圆形边界磁场与导线环示意图

当圆形边界的匀强磁场均匀变化时,产生涡旋电场的电场线是系列同心圆,因此导体圆环与一条电场线重合,则圆环上的场强大小处处相等.假如导线环有一个很小的缺口,那么感应电动势等于缺口两端的电势差,跟匀强电场中的电势差公式 $U = Ed$ 类比可知,导线环两端的电势差在数值上等于导线环上的场强与路径长度的乘积,因此感应电动势与场强的关系为

$$\epsilon = El = 2\pi rE$$

可知圆形涡旋电场的场强为

$$E = \frac{kR^2}{2r}$$

各种图形边界的匀变磁场激发的涡旋电场在闭合回路中产生的感应电动势可用微积分表示为

$$\epsilon = \oint_l \mathbf{E} d\mathbf{l} \quad (1)$$

4 用涡旋电场和场的叠加原理对例题进行深度解析

首先推导涡旋电场强度分量表达式,然后推导各边的电动势的表达式,最后求出数值.

对图 2 建立空间直角坐标系如图 4 所示,为右手系,可知 z 轴方向垂直于纸面向外,与磁场方向相反,则有 $\mathbf{B} = -B(t)\mathbf{k}$.当矩形边界的匀强磁场随时间均匀变化时,产生涡旋电场的电场线不是同心圆.

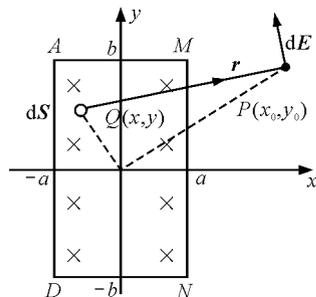


图 4 建立右手空间直角坐标系

设在有界磁场区域中位于点 $Q(x, y)$ 的某一小圆面 dS 内的磁场在有界磁场区域外一点 $P(x_0, y_0)$ 处激发的感应电场强度为 $d\mathbf{E}(x_0, y_0)$,由于电场线是以点 Q 为圆心的同心圆,因此可假想在线框所在平面内以点 $Q(x, y)$ 为圆心、以 $r = \overline{PQ}$ 为半径作一个圆来代表导体回路,则回路上各处的电场强度大小相等,都为 dE .在磁场增强的情况下,磁通量变化率大于零,由楞次定律可知感应磁场 \mathbf{B}' 的方向与原来磁场 \mathbf{B} 的方向相反,则感应电流沿逆时针方向,因此 $d\mathbf{E}$ 沿逆时针方向,且与半径 PQ 垂直,那么 $d\mathbf{E}$ 与 $d\mathbf{l}$ 同向,由式(1)可知小圆面 dS 内的磁场在假想回路中激发的感应电动势为 $\epsilon = 2\pi r dE$.由法拉第电磁感应定律可知,小圆面 dS 内的磁场在假想回路中激发的感应电动势为

$$\epsilon = \frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial B}{\partial t} dS$$

两式联立可得

$$d\mathbf{E} = \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial B}{\partial t} dS \quad (2)$$

位矢 \mathbf{r} 的方向由 Q 指向 P ,考虑到 $d\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{B}$ 三者方向关系遵循右手螺旋定则,则场强的矢量式为

$$d\mathbf{E} = \frac{1}{2\pi} \frac{\mathbf{r}}{r^2} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} dS \quad (3)$$

由电场叠加原理可知,整个矩形截面 S 区域内的磁场在 P 点激发的感应电场的强度为

$$\mathbf{E}(x_0, y_0) = \iint_S d\mathbf{E} = \frac{1}{2\pi} \iint_S \left(\frac{\mathbf{r}}{r^2} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) dS \quad (4)$$

Q到P的位矢用坐标轴方向的单位矢量表示为

$$\mathbf{r} = (x_0 - x)\mathbf{i} + (y_0 - y)\mathbf{j}$$

代入式(4)可得P点的电场强度为

$$\mathbf{E}(x_0, y_0) =$$

$$\frac{1}{2\pi} \iint_S \left[\left(\frac{x_0 - x}{r^2} \mathbf{i} + \frac{y_0 - y}{r^2} \mathbf{j} \right) \times \left(-\frac{\partial B}{\partial t} \mathbf{k} \right) \right] dS$$

由于叉积 $\mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$, $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$, 则有

$$\mathbf{E}(x_0, y_0) =$$

$$\frac{1}{2\pi} \frac{\partial B}{\partial t} \iint_S \left[\frac{x_0 - x}{r^2} \mathbf{j} - \frac{y_0 - y}{r^2} \mathbf{i} \right] dS \quad (5)$$

可知电场强度在x轴方向的分量为

$$E_x = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial B}{\partial t} \iint_S \left[\frac{y_0 - y}{r^2} \right] dS$$

设矩形区域沿x轴方向的长度为2a,沿y轴方向的长度为2b,磁场微元的面积大小为 $dS = dx dy$, 即得

$$E_x = -\frac{k}{2\pi} \int_{-a}^a \int_{-b}^b \left[\frac{y_0 - y}{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2} \right] dx dy \quad (6)$$

令 $F(y) = (x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2$, 取微分, 得

$$dF(y) = -2(y_0 - y) dy$$

$$\text{即} \quad (y_0 - y) dy = -\frac{1}{2} dF(y)$$

当 $y = -b$ 时

$$F_1(y) = (x_0 - x)^2 + (y_0 + b)^2$$

当 $y = b$ 时

$$F_2(y) = (x_0 - x)^2 + (y_0 - b)^2$$

将各式代入式(6)可得

$$E_x = \frac{k}{2\pi} \int_{-a}^a \int_{F_1(y)}^{F_2(y)} \frac{dF(y)}{2F(y)} dx = \frac{k}{4\pi} \int_{-a}^a \ln \frac{F_2(y)}{F_1(y)} dx$$

即

$$E_x = \frac{k}{4\pi} \int_{-a}^a \ln \frac{(x_0 - x)^2 + (y_0 - b)^2}{(x_0 - x)^2 + (y_0 + b)^2} dx \quad (7)$$

再令 $X = x_0 - x$, 则 $dX = -dx$, 当 $x = -a$ 时,

$X_1 = x_0 + a$; 当 $x = a$ 时, $X_2 = x_0 - a$, 可知

$$E_x = -\frac{k}{4\pi} \int_{x_0+a}^{x_0-a} \ln \frac{X^2 + (y_0 - b)^2}{X^2 + (y_0 + b)^2} dX \quad (8)$$

由于导线AM位于磁场的上边界, 则 $y_0 = b$, 应用积分公式

$$\int \ln(X^2 + Y^2) dX = X \ln(X^2 + Y^2) -$$

$$2 \left(X - Y \arctan \frac{X}{Y} \right) + C$$

对式(8)进行积分并整理得

$$E_x = -\frac{k}{4\pi} \left[(x_0 - a) \ln \frac{(x_0 - a)^2}{(x_0 - a)^2 + 4b^2} - (x_0 + a) \ln \frac{(x_0 + a)^2}{(x_0 + a)^2 + 4b^2} - 4b \left(\arctan \frac{x_0 - a}{2b} - \arctan \frac{x_0 + a}{2b} \right) \right] \quad (9)$$

在涡旋电场中,一段导体产生的电动势为

$$\epsilon = \int \mathbf{E} d\mathbf{l}$$

对于导线AM,若积分路径为 $M \rightarrow A$, 则有

$$\epsilon_{MA} = \int_a^{-a} E_x dx_0 \quad (10)$$

利用公式 $\ln \frac{M}{N} = \ln M - \ln N$ 将式(9)分解为6

项,先对各项分别进行积分运算,再求代数和即可得出导线AM产生的感应电动势的表达式.暂不考虑各项系数,对式(9)取积分,可分解为以下6项:

$$(1) S_1 = \int_a^{-a} (x_0 - a) \ln (x_0 - a)^2 dx_0 =$$

$$\frac{1}{2} \int_a^{-a} \ln (x_0 - a)^2 d(x_0 - a)^2$$

利用积分公式

$$\int \ln x dx = x \ln x - x + C$$

得

$$S_1 = \frac{1}{2} \left[(x_0 - a)^2 \ln (x_0 - a)^2 - (x_0 - a)^2 \right] \Big|_a^{-a} =$$

$$\frac{1}{2} [4a^2 \ln(4a^2) - 4a^2] = 4a^2 \ln(2a) - 2a^2$$

$$(2) S_2 = \int_a^{-a} (x_0 - a) \ln [(x_0 - a)^2 + 4b^2] dx_0 =$$

$$\frac{1}{2} \int_a^{-a} \ln [(x_0 - a)^2 + 4b^2] d[(x_0 - a)^2 + 4b^2]$$

令

$$[(x_0 - a)^2 + 4b^2] = X$$

则有

$$S_2 = \frac{1}{2} \int_{4b^2}^{4a^2+4b^2} \ln X dX$$

可得

$$S_2 = \frac{1}{2} [X \ln X - X] \Big|_{4b^2}^{4a^2+4b^2} =$$

$$2(a^2 + b^2) \ln(4a^2 + 4b^2) - 2a^2 - 4b^2 \ln 2b$$

$$(3) S_3 = \int_a^{-a} (x_0 + a) \ln(x_0 + a)^2 dx_0 =$$

$$\frac{1}{2} \int_a^{-a} \ln(x_0 + a)^2 d(x_0 + a)^2 = -4a^2 \ln(2a) + 2a^2$$

$$(4) S_4 = \int_a^{-a} (x_0 + a) \ln[(x_0 + a)^2 + 4b^2] dx_0 =$$

$$\frac{1}{2} \int_a^{-a} \ln[(x_0 + a)^2 + 4b^2] d[(x_0 + a)^2 + 4b^2] =$$

$$4b^2 \ln 2b - 2(a^2 + b^2) \ln(4a^2 + 4b^2) + 2a^2$$

$$(5) S_5 = \int_a^{-a} \arctan \frac{x_0 - a}{2b} dx_0$$

考虑到反正切函数是奇函数,可得

$$S_5 = \int_a^{-a} \arctan \frac{a - x_0}{2b} d(a - x_0)$$

利用积分公式

$$\int \arctan \frac{x}{c} dx = x \arctan \frac{x}{c} - \frac{c}{2} \ln(x^2 + c^2) + C$$

得

$$S_5 = \left\{ (a - x_0) \arctan \frac{a - x_0}{2b} - b \ln[(a - x_0)^2 + 4b^2] \right\} \Big|_a^{-a} =$$

$$2a \arctan \frac{a}{b} - b \ln(4a^2 + 4b^2) + 2b \ln 2b$$

$$(6) S_6 = \int_a^{-a} \arctan \frac{x_0 + a}{2b} d(x_0 + a) =$$

$$\left\{ (x_0 + a) \arctan \frac{x_0 + a}{2b} - b \ln[(x_0 + a)^2 + 4b^2] \right\} \Big|_a^{-a} =$$

$$-2b \ln 2b - 2a \arctan \frac{a}{b} + b \ln(4a^2 + 4b^2)$$

综上所述导体 AM 产生的感应电动势为

$$\epsilon_{MA} = -\frac{k}{4\pi} (S_1 - S_2 - S_3 + S_4 - 4bS_5 + 4bS_6)$$

即得

$$\epsilon_{MA} = \frac{k}{\pi} \left[4ab \arctan \frac{a}{b} + (a^2 - b^2) \right]$$

$$\ln(4a^2 + 4b^2) - 2a^2 \ln 2a + 2b^2 \ln 2b \quad (11)$$

同理得

$$\epsilon_{NM} = \frac{k}{\pi} \left[4ab \arctan \frac{b}{a} + (b^2 - a^2) \right]$$

$$\ln(4b^2 + 4a^2) - 2b^2 \ln 2b + 2a^2 \ln 2a \quad (12)$$

这就是矩形边界磁场随时间均匀变化时位于边界的矩形线框各边产生的感应电动势的计算公式。

把 $a = 0.05 \text{ m}$, $b = 0.1 \text{ m}$, $k = 10 \text{ T/s}$ 代入式

(11), 并将 $\arctan 0.5 = 26.565^\circ$ 化为弧度, 可得

$$\epsilon_{MA} = \epsilon_{DN} \approx 0.0353 \text{ V}$$

由法拉第电磁感应定律可得回路中的感应电动势为 $\epsilon = 0.2 \text{ V}$. 则

$$\epsilon = 2\epsilon_{AM} + 2\epsilon_{NM} = 0.2 \text{ V}$$

由此可知 NM 边的电动势为

$$\epsilon_{NM} \approx 0.0647 \text{ V}$$

设电路的总电阻为 r , 对应图 2 的等效电路如图 5 所示. 由闭合电路欧姆定律可知

$$U_{MN} = \epsilon_{MN} - Ir_{MN} \approx$$

$$0.0647 \text{ V} - 0.1 \text{ V} = -0.0353 \text{ V}$$

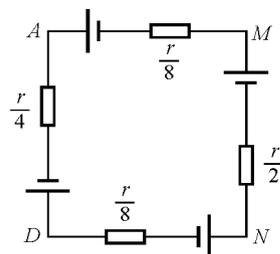


图 5 图 2 的等效电路图

5 结束语

利用麦克斯韦电磁场理论无法直接求出矩形线框的总电动势, 但可分别求出矩形线框各边产生的感应电动势, 取代数和即为总电动势; 利用法拉第电磁感应定律不能分别求出矩形线框各边导体产生的电动势, 但可直接求出线框的总电动势, 二者所得结果完全相等, 可谓殊途同归, 互为验证. 对于矩形边界磁场激发的涡旋电场在矩形线框各边分别产生的感应电动势的大小是否跟导线的长度成正比, 只能进行详细的定量推导, 通过具体的物理情境使得有关物理和数学知识在实际应用中完美结合.

参考文献

- 1 郑金. 涡旋电场问题归类解析. 物理教学, 2017, 39(5): 49 ~ 53, 56
- 2 赵凯华, 陈熙谋. 电磁学(下册). 北京: 高等教育出版社, 1988. 486
- 3 桑芝芳. 导体回路中感应电动势是如何分布的. 物理通报, 2010, 29(2): 8 ~ 11
- 4 刘大华. 矩形匀变磁场区域周围感应电场的计算. 物理教学, 2010, 32(7): 57 ~ 59
- 5 王荣汉, 于正荣. 谈谈感生电场的求解. 中学物理: 高中版, 2013, 31(8): 52 ~ 53