

# 平凸透镜焦距的测量与研究

陈舟 倪敏

(上海师范大学数理学院 上海 200234)

(收稿日期:2017-06-19)

**摘要:**测量平凸透镜的焦距,除了用成像法以外,还可用焦距公式法,即利用勾股定理、光的折射等方法测量平凸透镜曲率半径、折射率,然后由厚透镜的焦距测量公式计算得到透镜焦距.通过将成像法与公式法得到的结果进行分析和比较可知,厚透镜焦距测量的起始点并非透镜中央或边缘,需要加以计算求出主点;用成像法进行测量准确度较高;此实验作为拓展课程实验内容,可以举一反三,有助于培养学生的综合设计实验和科学研究能力.

**关键词:**平凸透镜 焦点 基点

## 1 引言

厚透镜与薄透镜不同,测量焦距时起始点不在透镜中央,也不在边缘.在大学物理实验中,常利用光具座和测节仪等测量厚透镜的主点、焦点等<sup>[1]</sup>.我们主要利用学生已经学习过的知识,利用球面折射的基本公式和透镜成像法,测量出光线会聚点与透镜边缘的距离<sup>[2]</sup>,结合基点、基面的知识,得到透镜焦距;也可以通过入射角、折射角计算透镜折射率<sup>[3]</sup>,用游标卡尺测量透镜长度、厚度,利用勾股定理得到透镜的曲率半径,代入厚透镜的焦距测量公式计算得到焦距,从而对透镜成像法所得结果进行检验,确定焦距的值以及测量的始末点.两种方法各有优劣,透镜成像法的优势在于免去测量透镜的曲率半径,以防透镜外形不规则,曲率半径用勾股定理难以测量;由于在测量中要求近轴光线,因此焦距公式法可避免在焦距的测量中光线偏离光轴的问题.但两种方法均能简化实验方法,帮助学生理解光学元件的3对基点,符合学生的认知能力和水平,巩固对于光学知识的掌握,通过实验对公式进行验证,逐步培养学生理论联系实际的能力以及实事求是的科学态度.

## 2 实验原理

### 2.1 基本参量

透镜两表面在其主轴上的间隔称为透镜的厚度.若透镜的厚度与球面的曲率半径相比不能忽略,则称为厚透镜;若可略去不计,则称为薄透镜.对于厚透镜而言,它有6个基点,分别为主点、节点和焦点,它们又有物方和像方之分.

#### (1) 焦点

平行于主轴的入射光线折射后和主轴相交的位置称为像方焦点 $F'$ .如果把物点放在主轴上某一点时,发出的光折射后将产生平行于主轴的平行光束,那么这一物点所在的点称为物方焦点 $F$ .过 $F$ 垂直于主轴的平面称为物方焦面,过 $F'$ 垂直于主轴的平面称为像方焦面.

#### (2) 主点

将物体垂直于光轴放置在水轴上的某点,在另一处会形成等大正立的像,水轴上的这两个点,分别称为物方主点 $H$ 和像方主点 $H'$ .即物方主点是物空间中横向放大率为 $+1$  ( $\beta = +1$ )的垂轴平面与水光轴的交点,像方主点是物方主点关于透镜的共轭点.过物方主点和像方主点垂直于光轴的两个平面

作者简介:陈舟(1994-),女,在读本科生.

通讯作者:倪敏(1960-),女,副教授,主要从事物理教育和物理实验研究.

分别称为物方主平面和像方主平面。

(3) 节点

节点是透镜主轴上角放大率  $\gamma = +1$  的两个共轭点。入射光线(或延长线)通过物方节点时,出射光线(或延长线)必通过像方节点,并与入射光线平行。过物方节点和像方节点垂直于光轴的平面分别称为物方节面和像方节面。

当厚透镜两侧处于同一介质即折射率相同时,主点与节点位置重合<sup>[4]</sup>。

2.2 球面折射原理

当光线从空气中射入折射率为  $n$ , 半径为  $r_1$  的球面介质中时,如图 1 所示,在近轴光线的条件下,由近轴光线下球面折射的物像公式可得

$$\frac{n}{s_1} - \frac{1}{s_1'} = \frac{n-1}{r_1}$$

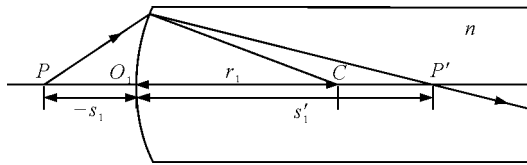


图 1 光线从空气中射入球面介质

当  $s_1 = -\infty$  时,即光线平行于主轴入射,得到像方焦距

$$f_1' = \frac{n}{n-1} r_1$$

当  $s_1' = \infty$  时,即发出的折射光线平行于主轴,得到物方焦距

$$f_1 = -\frac{1}{n-1} r_1$$

同理,当光线从折射率为  $n$ , 半径为  $r_2$  的凹球面介质进入空气中发生折射时可得

$$\frac{1}{s_2} - \frac{n}{s_2'} = \frac{1-n}{r_2}$$

当  $s_2 = -\infty$  时,即光线平行于主轴入射,得到像方焦距

$$f_2' = \frac{1}{1-n} r_2$$

当  $s_2' = \infty$  时,即发出的折射光线平行于主轴,得到物方焦距<sup>[5]</sup>

$$f_2 = -\frac{n}{1-n} r_2$$

2.3 厚透镜聚光原理

厚透镜结构如图 2 所示。

对折射球面  $O_1$

$$\frac{n}{s_1'} - \frac{1}{s_1} = \frac{n-1}{r_1}$$

对折射球面  $O_2$

$$\frac{1}{s_2} - \frac{n}{s_2'} = \frac{1-n}{r_2}$$

式中  $-s_1$  是物体与第一个折射球面间的距离,  $s_1'$  是第一个折射球面形成的像与顶点  $O_1$  间的距离;  $-s_2$  是第一个折射球面形成的像与第二个折射球面间的距离,  $s_2'$  是第二个折射球面形成的像与顶点  $O_2$  间的距离。

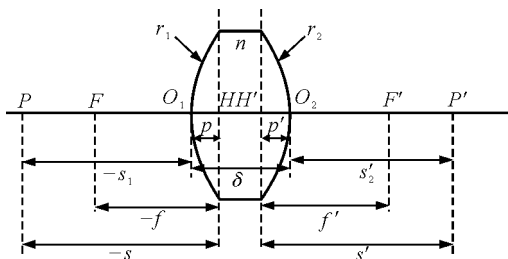


图 2 厚透镜的基点和基面

因为

$$s_2 = s_1' - \delta$$

且

$$\begin{cases} f_1' = \frac{n}{n-1} r_1 \\ f_2 = -\frac{n}{1-n} r_2 \end{cases}$$

可得

$$\delta = \frac{n}{\frac{1}{s_1} + \frac{n}{f_1'}} - \frac{n}{\frac{1}{s_2'} + \frac{n}{f_2}} \quad (1)$$

其中  $f_1'$  是第 1 个折射球面的像方焦距,  $f_2$  是第 2 个折射球面的物方焦距。

由透镜高斯公式

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'}$$

假定物距和像距的参考原点从  $O_1$  和  $O_2$  分别移动了距离  $p$  和  $p'$ , 则

$$\frac{1}{s_2' - p'} - \frac{1}{s_1 - p} = \frac{1}{f'} \quad (2)$$

比较式(1)和式(2), 计算得到

$$\begin{cases} p = -\frac{\delta f'}{f_2} \\ p' = -\frac{\delta f'}{f_1'} \\ f' = -\frac{f_1' f_2}{n(f_1' - f_2 - \delta)} \end{cases}$$

所以,对于厚透镜而言,如果令

$$\begin{cases} s = s_1 - p \\ s' = s'_2 - p' \end{cases}$$

则空气中厚透镜的物像公式的高斯形式与薄透镜的相同,皆为

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'}$$

此时物距为  $s_1 - p$ , 即  $P$  点与  $H$  点之间的距离; 像距为  $s'_2 - p'$ , 即  $H'$  点与  $P'$  点之间的距离. 其中,  $H$  点与  $O_1$  点之间的距离为  $p$ ,  $H'$  点与  $O_2$  点之间的距离为  $p'$ .  $H$  点和  $H'$  点分别称为物方主点和像方主点. 主点至焦点的距离为焦距. 由理论推导可以看出, 厚透镜焦距的测量与薄透镜不同, 薄透镜的焦距为透镜光心至焦点之间的距离, 而厚透镜测量末端依然在焦点处, 而起始端位于主点处. 主点与透镜边缘间的距离取决于透镜宽度、透镜折射率以及左右两侧曲面的曲率半径<sup>[6]</sup>.

### 2.4 平凸透镜聚光原理

平凸透镜相当于一边曲率半径为无穷大的厚透镜, 因此在计算主点和焦距时可将  $r_1$  或  $r_2$  取为无穷大<sup>[7]</sup>.

(1) 左凸右平 ( $r_2 = \infty$ ) (图 3)

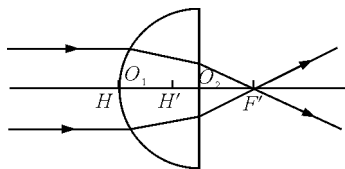


图3 左凸右平

则 
$$f_2 = -\frac{nr_2}{1-n} = \infty$$

所以

$$\begin{cases} f' = \frac{r_1}{n-1} \\ p = 0 \\ p' = -\frac{\delta}{n} \end{cases} \quad (3)$$

(2) 左平右凸 ( $r_1 = \infty$ ) (图 4)

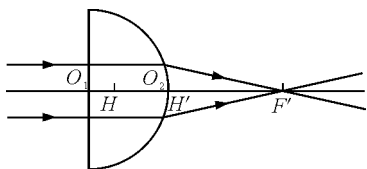


图4 左平右凸

则 
$$f'_1 = \frac{nr_1}{n-1} = \infty$$

所以

$$\begin{cases} f' = \frac{r_2}{1-n} \\ p = \frac{\delta}{n} \\ p' = 0 \end{cases} \quad (4)$$

通过计算可以看出, 平凸透镜在左平右凸和左凸右平两种情况下, 透镜焦距是相同的, 而测量焦距的起始位置不同. 由计算可知  $p$  和  $p'$  的大小取决于透镜厚度以及透镜折射率.

## 3 实验内容和实验方法

### 3.1 焦距公式法测平凸透镜焦距

(1) 测量透镜曲率半径

由于平凸透镜为圆柱体的一部分, 因此设此圆柱体的半径为  $r$ , 透镜平面的长度为  $d$ , 透镜的厚度为  $h$ , 如图 5 所示, 其中平凸透镜为黑色边框加粗的部分. 根据勾股定理可知

$$r^2 = (r-h)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

即

$$r = \frac{d^2}{8h} + \frac{h}{2}$$

用游标卡尺测量平凸透镜平面的长度  $d$  和透镜厚度  $h$ , 测量 3 组求出平均值, 计算平凸透镜的曲率半径.

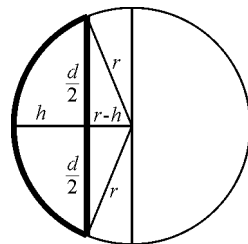


图5 平凸透镜几何图

(2) 测量透镜折射率

将透镜放在刻度盘上, 调整入射光线的角度, 使光线从透镜直边进入, 观察折射光线. 由于折射光线从曲边出射时会再次发生折射, 因此不能直接测量出射光线. 测量时需要记录出射光线与透镜曲边的交点, 连接入射点与交点, 并将其延长, 与刻度盘的边缘相交, 即可得到折射角的大小. 原理图如图 6 所示.

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$$

由于透镜在空气中,因此

$$n_1 = 1 \quad n = n_2 = \frac{\sin i_1}{\sin i_2}$$

重复测量 3 次求平均值.

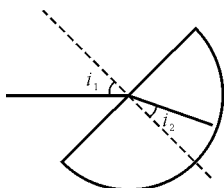


图 6 折射原理图

(3) 利用折射球面的像方焦距公式计算透镜焦距

将测得的透镜曲率半径及折射率代入折射球面的焦距公式式(3)和式(4),计算出平凸透镜两个方向上的焦距即物方和像方空间的焦距.

### 3.2 透镜成像法测平凸透镜焦距

(1) 同 3.1 中(1)用游标卡尺测量透镜的厚度  $h$ .

(2) 将挡光片插在灯箱前得到平行光线,由于公式是在近轴光线条件下推导得到,因此在测量中选用三缝挡光片或五缝挡光片中间的 3 条光束,测量焦点与透镜边缘的距离  $O_2F'$ .

(3) 平行光照射平凸透镜的曲边(左凸右平),如图 7 所示,画出光的传播路径,记录光线的会聚点,测量直边到交点的距离  $O_2F'$ ,由于透镜基点  $H'$  与  $O_2$  不重合,得到

$$p' = -\frac{\delta}{n} = -\frac{h}{n}$$

负号表示  $H'$  在  $O_2$  左侧,因此

$$H'O_2 = \frac{h}{n}$$

则  $f' = H'F' = |H'O_2| + |O_2F'|$

重复测量 3 次求透镜焦距平均值.

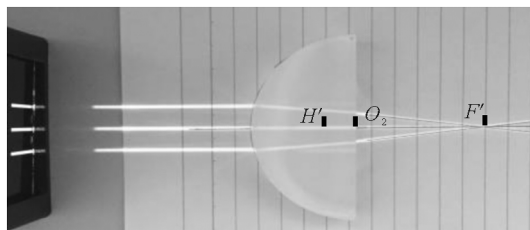


图 7 平行光照射平凸透镜曲边

(4) 平行光照射平凸透镜的直边(左平右凸),

将平凸透镜翻转,如图 8 所示,重复上述步骤(3),由于  $p' = 0$  即  $H'$  与  $O_2$  重合,测量出曲边到交点之间的距离  $O_2F'$ ,即为焦距  $f'$ ,则

$$f' = |O_2F'| = |H'F'|$$

重复 3 次求透镜焦距平均值.

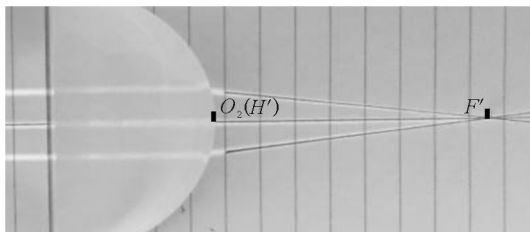


图 8 平行光照射平凸透镜直边

(5) 将透镜焦距的成像法与公式法比较,求其相对误差  $\eta$ .

## 4 实验结果分析

根据实验要求,由透镜成像法和厚透镜的焦距公式测得平凸透镜焦距  $f'$ (包括左凸右平以及左平右凸两个),并将成像法所得的数据与公式法比较,以公式法所得结果为理论值,计算相对误差,实验结果如表 1 和表 2 所示.

表 1 左凸右平透镜的实验数据

参量名称	公式法 $f' = \frac{r_1}{n-1}$	成像法	相对误差 $\eta/\%$
厚度 $h/\text{cm}$		2.987	
曲率半径 $r_1/\text{cm}$	3.022		
折射率 $n$	1.515	1.515	
$O_2F'/\text{cm}$		4.05	
焦距 $f'/\text{cm}$	5.868	6.02	2.6

表 2 左平右凸透镜的实验数据

参量名称	公式法 $f' = \frac{r_2}{1-n}$	成像法	相对误差 $\eta/\%$
曲率半径 $r_2/\text{cm}$	-3.022		
折射率	1.515		
$O_2F'/\text{cm}$		5.75	
焦距 $f'/\text{cm}$	5.868	5.75	2.0

通过采用尽可能简单的实验仪器,结合基点、基点及厚透镜成像等实验原理,对平凸透镜的参数

进行测量,优化了实验方法,由测量数据可见:以成像法测得的透镜焦距与测量相关参数代入厚透镜的焦距公式进行计算而得的数据基本吻合,误差小于3%.透镜成像是利用凸透镜会聚光线的原理,测量平行光线通过透镜后会聚点与透镜边缘的距离,考虑到基点、基面,加上基点到透镜边缘的距离,两者之和即为透镜的焦距.由于公式的推导中要求近轴光线,因此平行光必须尽可能靠近轴线,减小误差.其优点在于对平凸透镜本身无过高要求.公式法是通过将相关参数代入公式计算得到平凸透镜的焦距,避开了直接测量焦距中由于光线偏离轴线带来的误差,但其同样有一定的局限性.透镜的曲率半径是通过测量透镜长度和厚度,利用勾股定理计算得到的,这就意味着透镜必须为从一个圆柱体上一刀切下的一块,边缘处不能有磨损或损耗,否则需要通过其他方式计算透镜曲率半径,增大了实验的难度.所以两种测量方法可根据实际需要正确选择应用.

通过成像法的测量和公式法的验证,证实了理论推导中得到的基点和基面,解释了成像法测厚透镜焦距时测量起始点是不同的,不能简单地看成透镜中央或透镜边缘,而需要根据 $p'$ 的值加以判断.对于平凸透镜,左凸右平情况下

$$p' = -\frac{\delta}{n}$$

左平右凸时 $p' = 0$ ,即前者基点在透镜平面左侧,后者基点在透镜凸面边缘.由此可知对于一般厚透镜也是如此,基点即测量焦距时的起始点并不一定在透镜中央或透镜边缘,由3.3中的理论推导

$$p = -\frac{\delta f'}{f_2}$$

和

$$p' = -\frac{\delta f'}{f_1}$$

可知,物方焦距的测量起始点在透镜左侧边缘右方 $-\frac{\delta f'}{f_2}$ 处,像方焦距的测量起始点在透镜右侧边缘左方 $\frac{\delta f'}{f_1}$ 处,物方焦距和像方焦距分别为

$$f' = -f = -\frac{f_1 f_2}{n(f_1 - f_2 - \delta)}$$

此外,以公式法和成像法测量平凸透镜的焦距,其准确度较高,符合实验要求,由此也可引申出从实

验角度测量出透镜焦距 $f$ ,折射率 $n$ 和曲率半径 $r$ 中任意两个参量去求另一参量.作为设计实验,让学生自行研究平凸透镜的相关参量,增强学生的实验设计能力以及操作能力.

在实际测量中需注意以下3点:

(1) 考虑到符号法则,因此左凸右平和左平右凸情况下曲面的曲率半径为一对相反数.

(2) 平凸透镜的基点不一定与透镜边缘重合,当 $H'$ 和 $O_2$ 不是同一点时,焦距等于 $H'O_2$ 与 $O_2F'$ 两者的长度之和.

(3) 当入射光线从平凸透镜的平面和曲面射入时,成像法测得的焦距大小有所不同,原因在于实际测量中,光线偏离了轴线,导致误差的产生.

## 5 结束语

从二期课改的角度来看,物理实验教学的地位在逐步提升,考虑到高中生的理论知识以及实验能力,这部分内容可以作为拓展实验课程教学内容,让学生自行设计实验方法进行课题研究,对基点、基面等概念有更深刻的了解,也可作进一步引申,作为测量折射率和曲率半径的另一方法.对于学有余力的学生可在本实验的基础上进行拓展,引入大学中测量相关参量的办法,丰富物理师范生对物理实验设计内容的研究,有助于培养学生创新、设计和拓展实验的思维能力.

## 参考文献

- 1 林盛松,张和民.谈光组基点测定实验教学.西南师范大学学报(自然科学版),1994,19(5):567~570
- 2 翟勇.如何测量凸透镜的焦距.中学生数理化(八年级物理)(配合人教社教材),2013(11):16~17
- 3 郑永令.光的反射与折射.物理教学,2012,34(6):6~10
- 4 杨述武.普通物理实验(光学部分).北京:高等教育出版社,2007.24~25
- 5 母国光.光学.北京:人民教育出版社,1979.40~45
- 6 姚启钧.光学教程.北京:高等教育出版社,1984.165~167
- 7 卢杰,韩力,曲延吉.用移测显微镜测量平凸透镜的基点.物理实验,2014,34(10):8~11

(下转第78页)

角控制、单片机自动测量周期两个方面进行改进,并对  $\theta < 5^\circ$  和  $\theta < 10^\circ$  小角度摆角进行了实验研究,通过测量实验数据发现,改进后的仪器可以大大地减小误差,和理论值的百分误差小于 5%,误差减小,更贴近测量物体的理论值,增强了学生的实验兴趣.

### 参考文献

- 王海林,司嵘嵘,李相.落体法测量刚体转动惯量实验中引起测量值偏离的因素分析.物理实验,2012,32(5):25~30
- 秦艳芬.对三线摆测转动惯量实验的系统误差分析.宁

- 波工程学院学报,2016,28(2):5~8
- 庞通,黄艺荣,徐依斓,等.三线摆实验中摆角偏大产生的误差及修正方法.大学物理实验,2015,28(1):96~98
- 范让林,张璐璐,张斌,等.三线扭摆振动周期测量方法及其实现.机械设计与制造,2015(8):259~262
- 朱瑜,邵雪纯.三线摆测转动惯量时高度对测量结果的影响.实验研究与探索,2015,34(8):16~18
- 马国利.大学物理实验教程.西安:西安电子科技大学出版社,2015.23~27

## Improvement on Experimental Instrument of Measurement of Rigid Body Rotation Inertia

Wang Junping

(Faculty of aerospace engineering, Binzhou University, Binzhou, Shandong 256600)

**Abstract:** In this paper, FD-IM-II new type rigid body rotation inertia measuring instrument is improved. It was improved in two aspects: pendulum angle of instrument, periodic automatic measurement. The rotating inertia of the disc and ring is measured by the improved instrument. From the experimental results, it is found that the percentile error of the theoretical and experimental values of the disk and the ring is less than 5%, the improved instrument can effectively reduce the error of the experiment.

**Key words:** three-wire pendulum; rotation inertia; rigid body; error

(上接第 75 页)

## Measurement and Research on Focal Length of Planoconvex Lens

Chen Zhou Ni Min

(College of Mathematics and Science, Shanghai Normal University, Shanghai 200234)

**Abstract:** The focal length of planoconvex lens was not only measured by imaging method, but also calculated by equation, which means their radius of curvature and refractive index were measured by Pythagorean theorem, light refraction and other methods, and then the focal length of lens was calculated by focal-length measure equation for thick lens. In analyzing and comparing the results measured by imaging method with those calculated by equation, it can be seen that the starting point for measuring the focal length of thick lens is not at the center or rim of the lens, and the principal point should be determined by calculation; that measurements by imaging method are of higher accuracy; and that as the experimental content of the enrichment curriculum, this experiment from which they can draw inferences will help the students cultivate their abilities to comprehensively design experiments and do scientific research.

**Key words:** planoconvex lens; focal point; cardinal point