



对一道电场强度题目的3种解法与拓展分析

黄开智 仲 华 蔡静晋

(江苏省姜堰第二中学 江苏 泰州 225500)

(收稿日期:2017-09-01)

摘 要:高中物理竞赛中,经常出现求解电场强度的题目,文中对一道求解电场强度的习题给出了3种解法,分析了各自的特点与不足之处,同时也指出了发展学生物理核心素养过程中,等效思维培养的重要性,最后将该习题进行了延伸分析.

关键词:电场强度 微积分 带电球壳 等效思维

1 问题由来

近期,在对学生进行物理竞赛培训中,出现了一道关于求解电场强度的习题,题目如下:如图1所示,一均匀带正电半球壳,电荷量为 Q ,球壳半径为 R ,试求球心 O 处的电场强度.

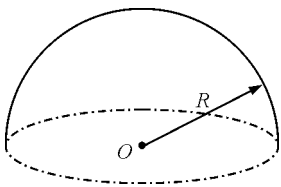


图1 均匀带电半球壳

2 问题分析

该题所考查的知识点主要有两个,一是点电荷的电场强度计算公式,二是电场强度的矢量性.高中生解该题,要求学生有较强的数学基础,主要是微积分,另外也需要良好的空间想象能力和知识类迁移能力.针对此题,主要有如下思考观点.

观点1:该题的解答必须要使用微积分,并且积分路径取决于微分思想,大致有3种思路.一是旋转积分,如图2所示,先求出半环在圆心处的场强,然后将半环水平旋转360度积分,便得到球壳在球心处的场强;二是叠加积分,如图3所示,先求出一个微分环带在球心处的场强,然后将环带在竖直方向叠加积分,求出球心处的场强;三是面积分,如图4

所示,先求出面积元 dS 在球心处的场强,然后对面积进行积分,得到球心处的场强.

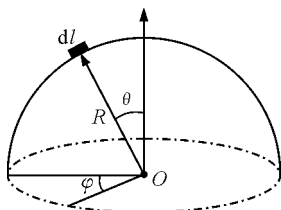


图2 旋转积分

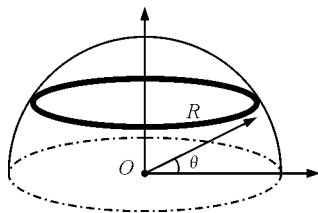


图3 叠加积分

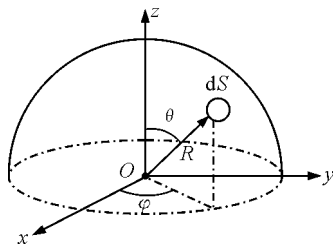


图4 面积分

观点2:该题的解答如果要使用积分,便超出了学生常规的能力范畴,故而必定有其他等效的方法,可以较为便捷地得到答案.

3 问题解决

针对积分思路,本文给出两种解答过程,如下.

解法 1: 旋转积分

如图 2 所示, 假设实心半圆环携带均匀正电荷, 电荷量为 q , 在环上选取线元 dl , 故其电荷量为

$$dq = \frac{q}{\pi R} dl = \frac{q}{\pi R} R d\theta = \frac{q}{\pi} d\theta$$

由点电荷场强计算公式 $E = \frac{kQ}{r^2}$ 可知, 电荷 dq 在圆心 O 处的场强大小为

$$dE = \frac{k dq}{R^2} = \frac{k}{R^2} \frac{q}{\pi} d\theta$$

考虑到该场强的水平分量相抵消, 只有竖直方向的分场强, 用 dE_y 表示, 则

$$dE_y = dE \cos \theta = \frac{k}{R^2} \frac{q}{\pi} \cos \theta d\theta$$

对 dE_y 进行积分, 便得到半圆环在圆心 O 处的场强大小

$$E_y = 2 \int dE_y = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k}{R^2} \frac{q}{\pi} \cos \theta d\theta = \frac{2kq}{\pi R^2}$$

最后将半圆环进行水平转动 360° , 便得到球壳, 且球壳电荷量等于无数个半圆环的电荷量的和, 即 $Q = \sum q$. 故而在球心处, 半球壳的场强大小为

$$E = \frac{2kQ}{\pi R^2}$$

方向竖直向下.

解法 2: 面积分

如图 4 所示, 在球壳上选取面积元 dS , 其电荷量为

$$dQ = \frac{Q}{2\pi R^2} dS$$

利用球坐标面积元微分公式

$$dS = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

则

$$dQ = \frac{Q}{2\pi} \sin \theta d\theta d\varphi$$

该面积元电荷在球心 O 处场强的竖直分量为

$$dE_y = \frac{k}{R^2} dQ \cos \theta = \frac{kQ}{2\pi R^2} \sin \theta \cos \theta d\theta d\varphi$$

于是利用双重积分

$$E_y = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{kQ}{2\pi R^2} \sin \theta \cos \theta d\theta$$

整理得到球心处的场强大小为

$$E = \frac{kQ}{2R^2}$$

方向竖直向下.

解法 3: 等效思维 —— 马德堡半球实验

如图 5 所示, 假设在球心处固定一电荷量为 q 的带负电小球, 然后在球壳处选取面积元 dS , 其电荷量为

$$dQ = \frac{Q}{2\pi R^2} dS$$

q 对 dQ 的电场力为

$$F = \frac{kq dQ}{R^2} = \frac{kqQ}{2\pi R^4} dS$$

于是该力对应的压强应为

$$p = \frac{F}{dS} = \frac{kqQ}{2\pi R^4}$$

由于在球壳上的压强处处相等, 故可以将这些压强等效为大气压强, 其物理情境便类似于“马德堡半球实验”. 大气压强 p_0 产生的压力作用在球面上, 球面的等效面积为半球截面 πR^2 , 则压力大小为

$$F = p_0 S = \pi R^2 p_0$$

将大气压强 p_0 换成电场力产生的压强 p , 故作用在球壳 Q 的电场力

$$Eq = pS = \frac{kqQ}{2\pi R^4} \pi R^2 = \frac{kqQ}{2R^2}$$

消去 q , 得出球心处场强大小为

$$E = \frac{kQ}{2R^2}$$

方向如图 5 所示, 竖直向下.

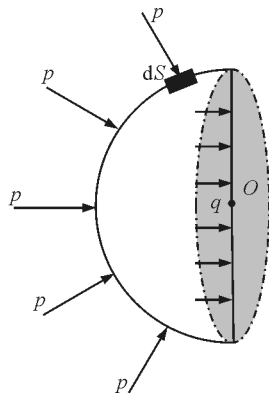


图 5 等效思维 —— 马德堡半球实验

4 问题感悟

上述解法 2 和解法 3 的结果一致但与解法 1 的

结果不同,有如下几点思考.

第一,解法1的结果是错误的.其错误原因在于微分思路有问题,当半圆环水平旋转 $d\varphi$ 时,形成的是如图6所示的“弧带”,而在该“弧带”上,随着 θ 角的增大(向下转动), $d\theta$ 角对应的电荷量也在增大,它不能等同于宽度一致的圆环的电荷分布.如同沿着“经线切西瓜”,总有下面西瓜片要比上面宽.因此,该解法的微分思路有问题,要做修改,而修改后,就变成了解法2的面积分了.

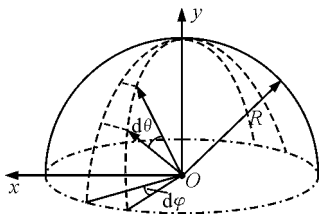


图6 弧带微分

第二,解法2遵循了严格意义上的积分思想,应该不存在什么问题,但其难点在于球坐标的微分面积元公式的记忆和基本积分运算,属于高等数学知识内容,超出了学生的能力范围,学生只有通过一定的数学培训后,才可能求解结果.

第三,解法3先是在球心处引入点电荷 q ,球壳对点电荷的电场力大小等于点电荷对球壳的作用力,再将该作用力所产生的压强等效为大气压强,利用马德堡半球实验规律,求出电场力的大小,进而得出场强.该解法思路巧妙,主要运用了等效思维,是在高中生能力范围之内的解法.此外,从高中物理学科核心素养来看,发展学生物理核心素养主要从“物理观念”“科学思维”“科学探究”和“科学态度与责任”4个方面做起.解法3的等效思维实际上突出了科学思维中的模型构建,从物理学的视角,找出模型之间的内在规律及相互关系,进行分析综合,这有助于提升学生提出创造性见解的能力与品质,故而本文推荐该种解法.

5 问题拓展

若将该题改为如图7所示,不求球心 O 处的场强,而是求距球心 O 正下方 h 位置处的 A 点的场强.此时,再利用等效思维,便无从下手,只能借助面积

分,而积分的难点在于计算,分析过程如下.

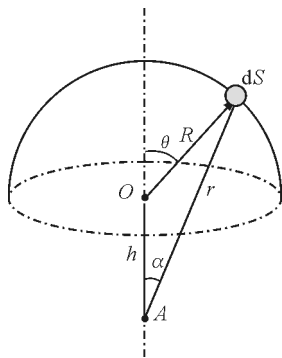


图7 均匀带电半球壳

第一步,建立球坐标,选取面积元,如图7所示.则

$$dQ = \frac{Q}{2\pi} \sin \theta d\theta d\varphi$$

该面积元在 A 点产生的场强为

$$dE = \frac{kQ}{2\pi(R^2 + h^2 + 2Rh \cos \theta)} \sin \theta d\theta d\varphi$$

第二步,算竖直分场强

$$dE_y = dE \cos \alpha$$

其中

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{R^2 \sin^2 \theta}{h^2 + R^2 + 2Rh \cos \theta}}$$

第三步,对 φ 和 θ 积分,求解场强 E .

积分过程极其复杂,要换一种思路.求解电场强度的另一种方法是可以先求解电势 $\varphi^{[1]}$,利用电场强度与电势关系 $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$,再求解场强,其优点在于电势的求解是标量叠加,容易理解,可降低积分难度.

6 总结

高中阶段,对学有余力的学生,在竞赛培训的过程中,应该重视物理思维的培养,提升学生的问题分析能力和物理建模能力,如上文“解法3”所运用的等效思维.不可否认的是,数学运算能力,特别是高等数学部分内容较为重要,但不能过分依赖数学运算,而忽视了物理本质.

参考文献

- 黄开智.带电体的电势及场强求解方法.物理之友, 2015,31(11):36~38