另解 2017 年全国物理竞赛预赛第 16 题

费新良　沈　卫

（菱湖中学　浙江 湖州　313018）

（收稿日期：2017－09－25）

摘　要：对 2017 年第 34 届全国中学生物理竞赛预赛最后一题的参考答案给出的解法进行探讨，结合现阶段高中数学都学习导数知识的特点，提出应用导数解题的思想，供大家参考.

关键词：物理竞赛　微元法　小量近似　导数

1　试题回放与参考解析

2017 年第 34 届全国中学生物理竞赛预赛的最后一题，原题如下.

【题目】 如图 1 所示，两劲度系数均为 κ 的同样的轻弹性绳的上端固定在一水平面上，下端悬挂一质量为 m 的小物块. 平衡时，轻弹性绳与水平面的夹角为 α_0，弹性绳长度为 l_0. 现将小物块向下拉一段微小的距离后从静止释放.

（1）证明小物块做简谐运动；

（2）若 $\kappa = 0.50\ \mathrm{N/m}$，$m = 50\ \mathrm{g}$，$\alpha_0 = 30°$，$l_0 = 2.0\ \mathrm{m}$，重力加速度 $g = 9.8\ \mathrm{m/s^2}$，求小物块做简谐运动的周期 T；

（3）当小物块下拉的距离为 $0.010\ \mathrm{m}$ 时，写出此后该小物块相对于平衡位置的偏离随时间变化的方程. 已知：当 $x \ll 1$ 时，$\dfrac{1}{1+x} \approx 1 - x$，$\sqrt{1+x} \approx 1 + \dfrac{1}{2}x$.

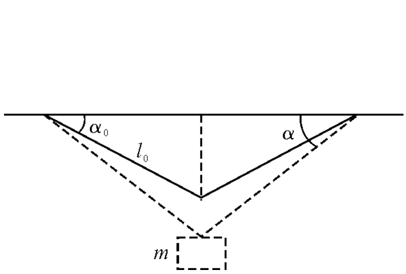

图 1　原题附图

参考答案给出的解法如下.

解析：（1）取小物块的平衡位置为原点 O，y 轴的方向竖直向下，如图 2 所示. 由牛顿第二定律可知

$$ma = mg - 2\kappa(l - L)\sin\alpha \tag{1}$$

式中 a 为小物块的加速度，L 为弹性绳的原长，l 和 α 分别为小物块离开平衡位置的位移为 y 时弹性绳的长度和弹性绳与水平面的夹角. 由几何关系有

$$l = \sqrt{d^2 + (l_0 \sin\alpha_0 + y)^2} \tag{2}$$

$$\sin\alpha = \frac{l_0 \sin\alpha_0 + y}{l} \tag{3}$$

式中 $d = l_0 \cos\alpha_0$. 由于 y 很小，y^2 可略去，利用近似计算公式，当 $x \ll 1$ 时，$\sqrt{1+x} \approx 1 + \dfrac{1}{2}x$，注意到 $l_0 = \sqrt{d^2 + (l_0 \sin\alpha_0)^2}$，式(2) 可简化为

$$l = l_0 + y\sin\alpha_0 \tag{4}$$

将式(4) 代入式(3)，利用近似计算公式，当 $x \ll 1$ 时，$\dfrac{1}{1+x} \approx 1 - x$，并忽略 y^2 项，式(3) 可简化为

$$l_0 \sin\alpha = l_0 \sin\alpha_0 + y\cos^2\alpha_0 \tag{5}$$

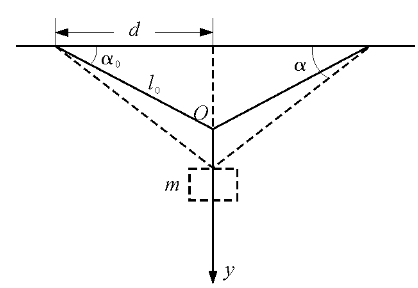

图 2　原题解析用图

当小物块处在平衡位置时有

$$mg = 2\kappa(l_0 - L)\sin\alpha_0 \tag{6}$$

即

$$L = l_0 - \frac{mg}{2\kappa \sin\alpha_0} \tag{7}$$

将式(5)、(6)、(7) 代入式(1)，略去 y^2 项，可将式(1) 化成

$$ma = -\left(2\kappa\sin^2\alpha_0 + \frac{mg\cos^2\alpha_0}{l_0\sin\alpha_0}\right)y \qquad (8)$$

上式右端括号中的量是大于零的常量，式(8) 可表示为

$$ma = -m\omega^2 y \qquad (9)$$

式中

$$\omega^2 = \frac{2\kappa}{m}\sin^2\alpha_0 + \frac{g\cos^2\alpha_0}{l_0\sin\alpha_0} \qquad (10)$$

式(9) 是简谐振动的动力学方程. 因此，当 y 很小时，小物块做简谐振动.

第(2)、(3) 两小题的解答从略.

点评：参考答案给出的解法是建立在微元思想和小量近似思想上的，可以避开高等数学的相关知识，而且有些学生在竞赛辅导时学习过微元思想和小量近似的相关知识. 但高中的小量近似和微元思想都学习得不系统，也不常用，所以很多学生在用它解题时很难掌握其准确的用法，导致这个题目的得分不高.

2 利用导数再解此题

现鉴于高中数学已经初步学习了导数的相关知识，我们完全可以避开微元与小量思想，从学生熟悉的导数入手来解这个题目. 利用导数知识对这道题的解法如下.

解析：如图 3 所示，小物块平衡时，满足方程

$$mg = 2\kappa(l_0 - L)\sin\alpha_0$$

其中 L 为弹性绳的原长，l_0 和 α_0 分别为小物块在平衡位置时弹性绳的长度和弹性绳与水平面的夹角. 可解得原长为

$$L = l_0 - \frac{mg}{2\kappa\sin\alpha_0}$$

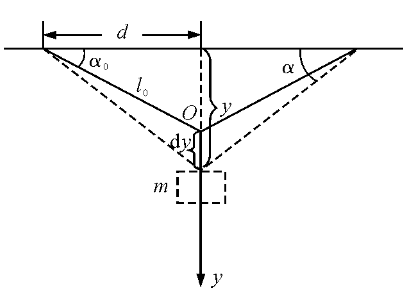

图 3 利用导数求解用图

现将小物块向下拉一段微小位移 $\mathrm{d}y$ 至与水平面相距为 y 的位置，此时弹性绳的长度为 l，绳与水平面的夹角为 α，取竖直向下为正方向，此时小物块的受力关于 y 的函数为

$$F(y) = mg - 2\kappa(l - L)\sin\alpha$$

其中 $l = \sqrt{y^2 + (l_0\cos\alpha_0)^2}$，$\sin\alpha = \dfrac{y}{l}$，将它们代入上式得

$$F(y) = mg - 2\kappa y + 2\kappa L\,\frac{y}{\sqrt{y^2 + (l_0\cos\alpha_0)^2}}$$

对 $F(y)$ 求导可得

$$F'(y) = -2\kappa + 2\kappa\left(l_0 - \frac{mg}{2\kappa\sin\alpha_0}\right)\cdot \frac{(l_0\cos\alpha_0)^2}{[y^2 + (l_0\cos\alpha_0)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

并求在 $y = l_0\sin\alpha_0$ 时的导数值为

$$F'(y) = -\left(2\kappa\sin^2\alpha_0 + \frac{mg\cos^2\alpha_0}{l_0\sin\alpha_0}\right)$$

可以把上式写成

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}y} = -\left(2\kappa\sin^2\alpha_0 + \frac{mg\cos^2\alpha_0}{l_0\sin\alpha_0}\right)$$

即小物块从平衡位置向下偏移 $\mathrm{d}y$ 时的力

$$\mathrm{d}F = -\left(2\kappa\sin^2\alpha_0 + \frac{mg\cos^2\alpha_0}{l_0\sin\alpha_0}\right)\mathrm{d}y$$

此式可写成

$$\mathrm{d}F = -m\omega^2\mathrm{d}y$$

式中

$$\omega^2 = \frac{2\kappa}{m}\sin^2\alpha_0 + \frac{g\cos^2\alpha_0}{l_0\sin\alpha_0}$$

此式为简谐振动的动力学方程. 因此，当 $\mathrm{d}y$ 很小时，小物块做简谐振动.

点评：此方法不再需要用到小量近似，而是用到导数的知识来解决问题，在方法上更清晰明确，而计算上也更方便. 而且导数在高中已经有系统的学习和训练，此题的这种解法不仅是对高中导数的应用，还可反过来进一步加深对物理的微元和导数的理解. 笔者觉得此方法可在高中数学支持的基础上多加以应用.