巧解第 34 届全国中学生物理竞赛复赛第二题

杨祖华　田仁军

（贵阳市第一中学　贵州 贵阳　550081）

（收稿日期:2017－09－26）

摘　要:利用圆锥曲线的特性以及开普勒第二定律等知识巧妙地求解了第 34 届全国中学生物理竞赛复赛理论考试的第二题,总结了抛物线的特性及开普勒第二定律在天体运动中应用的技巧.

关键词:天体运动　圆锥曲线　开普勒第二定律

【题目】(第 34 届全国中学生物理竞赛复赛理论考试第二题)(以下简称“复赛考试第二题”)星体 P(行星或彗星)绕太阳运动的轨迹为圆锥曲线 $r=\dfrac{k}{1+\varepsilon\cos\theta}$,式中 r 是 P 到太阳 S 的距离,θ 是矢径 SP 相对于极轴 SA 的夹角(以逆时针方向为正),$k=\dfrac{L^2}{GMm^2}$,L 是 P 相对于太阳的角动量,$G=6.67\times 10^{-11}\,\mathrm{m^3\cdot kg^{-1}\cdot s^{-2}}$,为引力常量,$M\approx 1.99\times 10^{30}\,\mathrm{kg}$,为太阳的质量,$\varepsilon=\sqrt{1+\dfrac{2EL^2}{G^2M^2m^3}}$,为偏心率,$m$ 和 E 分别为 P 的质量和机械能.假设有一颗彗星绕太阳运动的轨道为抛物线,地球绕太阳运动的轨道可近似为圆,两轨道相交于 C,D 两点,如图 1 所示.已知地球轨道半径 $R_e\approx 1.49\times 10^{11}\,\mathrm{m}$,彗星轨道近日点 A 到太阳的距离为地球轨道半径的三分之一,不考虑地球和彗星之间的相互影响.求:

(1) 彗星先后两次穿过地球轨道所用的时间;

(2) 彗星经过 C,D 两点时速度的大小.

已知积分公式

$$\int\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x+a}}=\frac{2}{3}(x+a)^{\frac{3}{2}}-2a(x+a)^{\frac{1}{2}}+C$$

式中的 C 是任意常数.

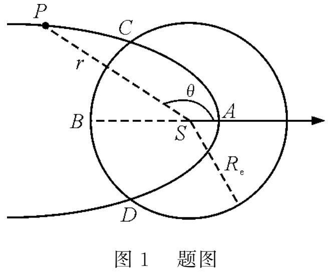

图 1　题图

主办方给的标准答案的解题思路是根据系统的能量关系,导出彗星运动的速度表达式,进而利用速度的微商定义式 $v=\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ 变形为 $\mathrm{d}t=\dfrac{\mathrm{d}r}{v}$ 后通过定积分求出运动时间.然而,抛物线具有一些比较容易掌握的特性,利用这些特性和开普勒第二定律来解决这个问题会显得十分简单.

解:(1) 由题意可知,彗星的轨迹方程为

$$r=\frac{\frac{2R_e}{3}}{1+\cos\theta}\tag{1}$$

如图 2 所示,彗星运动到地球轨道的 C 点时有

$$r=R_e\tag{2}$$

$$\theta+\varphi=\pi\tag{3}$$

$$AE=\frac{1}{3}R_e+r\cos\varphi\tag{4}$$

$$CD=2r\sin\varphi\tag{5}$$

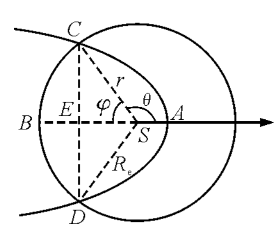

图 2　彗星运动到 C 点分析图

抛物线的弓形 CDA 的面积 S_1 为

$$S_1=\frac{2}{3}AE\cdot CD\tag{6}$$

$\triangle CDS$ 的面积 S_2 为

$$S_2=\frac{1}{2}CD\cdot r\cos\varphi\tag{7}$$

在 $C\rightarrow D$ 过程中,彗星与太阳连线扫过面积 S 为

$$S=S_1-S_2\tag{8}$$

令彗星在近日点 A 的速度为 v_A,由开普勒第二定律可知,彗星与太阳的连线在单位时间间隔内扫过的面积 S' 为

$$S'=\frac{1}{2}SA\cdot v_A\tag{9}$$

彗星先后两次经过地球轨道所用的时间为

$$t=\frac{S}{S'} \tag{10}$$

因为彗星运动的轨迹是抛物线,所以彗星与太阳构成的系统机械能守恒且为零.彗星在近日点 A 有

$$\frac{1}{2}mv_{\mathrm{A}}^{2}+\left(-\frac{GMm}{\frac{R_{\mathrm{e}}}{3}}\right)=0 \tag{11}$$

由式(1)～(11)可得

$$t=\frac{20\sqrt{3}}{27}\sqrt{\frac{R_{\mathrm{e}}^{3}}{GM}} \tag{12}$$

由式(12)代入数据计算得

$$t=6.40\times10^{6}\ \mathrm{s} \tag{13}$$

(2)彗星在 C 点的速率等于在 D 点的速率,由机械能守恒且为零可得

$$\frac{1}{2}mv_{C}^{2}+\left(-\frac{GMm}{R_{\mathrm{e}}}\right)=0 \tag{14}$$

即得

$$v_{C}=v_{D}=\sqrt{\frac{2GM}{R_{\mathrm{e}}}} \tag{15}$$

由式(15)代入数据计算得

$$v_{C}=v_{D}=4.22\times10^{4}\ \mathrm{m/s} \tag{16}$$

上文中的式(1)和式(6)是利用圆锥曲线的特性直接写出的,式(9)是利用开普勒第二定律考虑极短时间间隔内的情况写出来的,其他的式子属于基本的几何、物理或能量关系式.下面,我们介绍本题涉及到的圆锥曲线的特性和式(9)的来源.

1　圆锥曲线的极坐标方程

式子 $r(\theta)=\dfrac{k}{1+\varepsilon\cos\theta}$ 称为圆锥曲线的极坐标方程,式中的 k 等于通径长的一半,对于抛物线也等于顶点到焦点距离的 2 倍[式(1)利用到了这一点],对于椭圆或双曲线也等于 $\dfrac{b^2}{a}$;式中的 ε 称为偏心率或离心率,对于抛物线,$\varepsilon=1$[式(1)利用到了这一点],对于椭圆,$\varepsilon=\dfrac{c}{a}<1$,对于双曲线 $\varepsilon=\dfrac{c}{a}>1$.

2　抛物线与坐标轴围成图形的面积公式

如图 3 所示,抛物线的方程为 $y=kx^2\ (k>0)$,抛物线与 x 轴及平行于 y 轴的辅助线围成的图形 Ox_1Q 的面积为

$$S_{Ox_1Q}=\int_0^{x_1}y\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x_1y_1 \tag{17}$$

则抛物线与 y 轴及平行于 x 轴的辅助线围成的图形 Oy_1Q 的面积为

$$S_{Oy_1Q}=\frac{2}{3}x_1y_1 \tag{18}$$

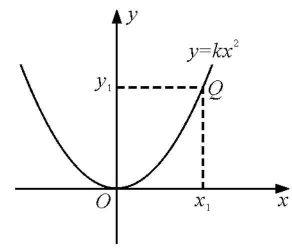

图 3　抛物线

只要从抛物线的顶点算起,式(1)和式(2)对任意形式的抛物线均适用[式(16)利用到了式(2)的结论].

3　行星与太阳连线扫过面积的变化率

在近日点(或远日点),行星运动的速度 v 垂直于矢径 $\boldsymbol{r}$,在行星运动到近日点时的一小段时间 Δt 内,考虑 $\Delta t\to0$ 的微小过程内,行星运动的位移等于 $v\Delta t$ 且仍然垂直于矢径 $\boldsymbol{r}$,该微小过程中行星与太阳连线扫过的面积为 $\dfrac{r(v\Delta t)}{2}$,即得该过程中行星与太阳连线扫过的面积对时间的变化率为 $\dfrac{rv}{2}$,这即是单位时间内行星与太阳连线扫过的面积,式(9)利用了这个结果.

总之,对于天体运动的问题,若是抛物线轨道,需要计算某过程中运动的时间,则可以利用上文中的式(18)、开普勒第二定律及其他关系式联立求解,其中,在写面积对时间的变化率时,考虑从近日点或远日点处着手会比较容易,这时可以直接得出面积的变化率等于 $\dfrac{rv}{2}$,这种方法相对利用积分的方式较为简单.

参考文献

1　罗炼.刍议高中物理中天体运动类题型的解题技巧.数理化解题研究,2016(31):65

2　陈伟山.天体运动专题教学探究.科技视界,2014(20):227

3　沈晨.专题 11 天体运动种种.中学物理教学参考,2005(05):45～55

4　李宁,王洪娜,孙登照.对物理竞赛中的天体运动问题的讨论.中学物理,2017(03):43～44

5　王建伟,李兴.近日点和远日点速度的两种典型解法.物理教师,2013(06):48

6　徐炳.看嫦娥如何奔月——天体运动类问题的解题方法和技巧.物理教学探讨,2009(03):53～55