大学物理教学

值得举一反三的一维阶梯势问题*

陆爱江　杨沁玉

（东华大学理学院物理系　上海　201620）

（收稿日期：2017－10－24）

摘　要：针对一维阶梯势的求解进行了细致的分析和计算. 在得到有趣的结果的同时，针对粒子入射方向和阶梯势的位置对结果的影响进行了深入讨论. 作为一维定态问题求解的练习，一维阶梯势问题具有代表性，而其结果较直观地体现量子力学的独特之处. 建议授课教师在《量子力学》课程讲授过程中加以详细讲解.

关键词：阶梯势　势函数　透射系数　反射系数

在《量子力学》课程中一维定态问题是一个教学的重点. 它是学习量子化概念的基础，也是学生初次接触薛定谔方程，对量子概念有所体会的生动范例. 我们在课堂上对很多基本的一维势阱、势垒问题做出了细致的讲解和计算，也有很多同仁对这些问题进行讨论[1,2]. 而对这一类问题 —— 一维阶梯势问题[3,4]，我们却较少关注. 此类问题在习题中、考研试卷中偶尔出现[5,6]，考查学生求解一维薛定谔方程的基本技能. 一维阶梯势的问题不是一个特殊的问题，但是在与学生的讨论和教学中我们发现，这是一个值得认真研究的问题.

1　高于零点的阶梯势 且粒子能量 $E>V_0$

1.1　粒子从左侧入射

首先我们来看看教材中的习题设计[7]. 首先，一维阶梯势的势分布以分段函数形式给出，如图 1 所示.

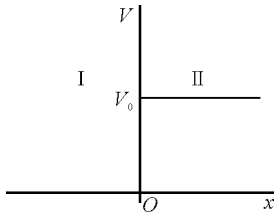

图 1　高于零点的一维阶梯势分布

$$V(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ V_0, & x\geqslant 0\end{cases}\quad (V_0>0) \tag{1}$$

假设粒子（能量 $E>V_0$）从左侧入射，求解反射系数和透射系数.

规范的求解步骤如下.

（1）写出薛定谔方程

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+V(x)\psi=E\psi \tag{2}$$

（2）对不同区域求解

I 区

$$\psi_{\mathrm{I}}''+\frac{2mE}{\hbar^2}\psi_{\mathrm{I}}=0 \tag{3}$$

$$\psi_{\mathrm{I}}=A\mathrm{e}^{ikx}+R\mathrm{e}^{-ikx} \tag{4}$$

其中 $k=\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$. 系数 A 和 R 表示入射波（右行波）和反射波（左行波）的叠加系数，尚未进行归一化处理.

II 区

$$\psi_{\mathrm{II}}''+\frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}\psi_{\mathrm{II}}=0 \tag{5}$$

$$\psi_{\mathrm{II}}=T\mathrm{e}^{ik'x} \tag{6}$$

其中 $k'=\frac{\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar}$. 系数 T 表示透射波（右行波）的系数，未进行归一化处理.

* 国家自然科学基金资助，编号：11204030

作者简介：陆爱江（1979－　），女，博士，讲师，主要从事大学物理、量子力学课程教学和材料计算工作.

(3) 根据连续性条件写出 $\psi_{\mathrm{I}}(0)=\psi_{\mathrm{II}}(0)$ 及 $\psi_{\mathrm{I}}'(0)=\psi_{\mathrm{II}}'(0)$.

$$\begin{cases} A+R=T \\ ik(A-R)=ik'T \end{cases} \tag{7}$$

进而得到反射系数为

$$r=\left|\frac{R}{A}\right|^2=\left|\frac{1-\frac{k'}{k}}{1+\frac{k'}{k}}\right|^2=$$

$$\left|\frac{V_0}{(\sqrt{E}+\sqrt{E-V_0})^2}\right|^2=\frac{V_0^2}{(\sqrt{E}+\sqrt{E-V_0})^4} \tag{8}$$

结果与很多参考书籍中结果一致[8]. 透射系数根据 $t=1-r$ 即可求出. 如果 $V_0=\beta E$,反射系数即为 $\frac{\beta^2}{(1+\sqrt{1-\beta})^4}$.

对这个结果我们可以讨论两种极限的情况. $\beta\approx 0$ 时(几乎没有阶梯或者粒子能量远大于阶梯势的高度),反射系数趋近于零,粒子完全通过;$\beta\approx 1$ 时(粒子能量与阶梯平齐),反射系数趋近于 1,粒子被完全反射,即粒子没有机会进入到右侧区域(Ⅱ).

1.2　粒子从右侧入射

如果粒子(能量 $E>V_0$)从右侧入射,情况会不会不同呢?

$$\psi_{\mathrm{II}}''+\frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}\psi_{\mathrm{II}}=0 \tag{9}$$

$$\psi_{\mathrm{II}}=A\mathrm{e}^{-ikx}+Re^{ikx} \tag{10}$$

其中 $k=\frac{\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar}$.

$$\psi_{\mathrm{I}}''+\frac{2mE}{\hbar^2}\psi_{\mathrm{I}}=0 \tag{11}$$

$$\psi_{\mathrm{I}}=T\mathrm{e}^{-ik'x} \tag{12}$$

其中 $k'=\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$.

由连续性条件 $\psi_{\mathrm{I}}(0)=\psi_{\mathrm{II}}(0)$ 及 $\psi_{\mathrm{I}}'(0)=\psi_{\mathrm{II}}'(0)$ 得到

$$\begin{cases} A+R=T \\ -ik(A-R)=-ik'T \end{cases} \tag{13}$$

反射系数为

$$r=\left|\frac{R}{A}\right|^2=\left|\frac{1-\frac{k'}{k}}{1+\frac{k'}{k}}\right|^2=$$

$$\left|\frac{V_0}{(\sqrt{E}+\sqrt{E-V_0})^2}\right|^2=\frac{V_0^2}{(\sqrt{E}+\sqrt{E-V_0})^4} \tag{14}$$

仔细观察,上述结果式(14)与粒子从左侧入射的结果式(8)完全相同. 这个结果是不是令人感到惊奇?

可能很多同学在求解 1.2 问题之前,会想当然地认为,从左侧入射的情况反射系数应该大于从右侧入射的反射系数. 这实际上是一个宏观的印象——人在行走中上下台阶的困难程度是不同的. 而实际上严格的求解告诉我们,在量子的范畴,阶梯势对粒子的反射几率是同一的,不论粒子从哪一侧入射. 这一结果恰恰体现了量子世界的与众不同. 通过对这个题目的详细求解应该会让同学们对量子力学这门课程的独特之处有一个更直接的体会.

2　高于零点的阶梯势　且粒子能量 $E<V_0$

细心的同学会注意到,我们在解决上面问题时要求粒子的能量 $E>V_0$,那么如果粒子能量不满足这个条件,其结果又会怎样呢? 我们假设粒子从左侧入射,$V_0>E>0$,薛定谔方程可以写为

$$\psi_{\mathrm{I}}''+\frac{2mE}{\hbar^2}\psi_{\mathrm{I}}=0 \tag{15}$$

$$\psi_{\mathrm{I}}=A\mathrm{e}^{ikx}+R\mathrm{e}^{-ikx} \tag{16}$$

仍然有 $k=\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$.

$$\psi_{\mathrm{II}}''-\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}\psi_{\mathrm{II}}=0 \tag{17}$$

$$\psi_{\mathrm{II}}=T\mathrm{e}^{-k'x} \tag{18}$$

$$k'=\frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar}$$

零点处连续,所以

$$\begin{cases} A+R=T \\ ik(A-R)=-k'T \end{cases}$$

解得

$$r=\left|\frac{R}{A}\right|^2=\left|\frac{1+i\frac{k'}{k}}{1-i\frac{k'}{k}}\right|^2=1$$

反射系数为 1.

反射系数为 1 说明粒子将被完全反射. 其实这

个结果不难理解，阶梯势可以看作是一个无限宽的方势垒. 方势垒的透射系数 $\sim \mathrm{e}^{-\frac{2a}{\hbar}\sqrt{2m(V_0-E)}}$ [9]，a 为势垒宽度. 所以当势垒宽度趋于无穷，透射系数自然趋于零. 如此，反射系数为 1 即为必然的结果.

3　低于零点的阶梯势

我们还看到很多习题中的一维阶梯势是这么给出的

$$V(x)=\begin{cases}0, & x\geqslant 0\\ -V_0, & x<0\end{cases}\qquad (V_0>0) \tag{19}$$

如图 2 所示.

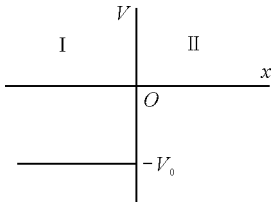

图 2　低于零点的一维阶梯势分布

假设粒子(能量 $E>0$) 仍然从左侧入射，求透射系数和反射系数.

$$\psi_{\mathrm{I}}''+\frac{2m(E+V_0)}{\hbar^2}\psi_{\mathrm{I}}=0 \tag{20}$$

$$\psi_{\mathrm{I}}=A\mathrm{e}^{ikx}+R\mathrm{e}^{-ikx} \tag{21}$$

其中 $k=\dfrac{\sqrt{2m(V_0+E)}}{\hbar}$.

$$\psi_{\mathrm{II}}''+\frac{2mE}{\hbar^2}\psi_{\mathrm{II}}=0 \tag{22}$$

$$\psi_{\mathrm{II}}=T\mathrm{e}^{ik'x} \tag{23}$$

$$k'=\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

所以连续性条件给出

$$\begin{cases}A+R=T\\ ik(A-R)=ik'T\end{cases}$$

反射系数为

$$r=\left|\frac{R}{A}\right|^2=\left|\frac{1-\dfrac{k'}{k}}{1+\dfrac{k'}{k}}\right|^2=$$

$$\left|\frac{V_0}{(\sqrt{E}+\sqrt{E+V_0})^2}\right|^2=\frac{V_0^2}{(\sqrt{E}+\sqrt{E+V_0})^4} \tag{24}$$

如果 $V_0=\beta E(0<\beta<1)$，反射系数即为

$$r=\frac{\beta^2}{(1+\sqrt{1+\beta})^4} \tag{25}$$

当 $\beta\approx 0$ 时(几乎没有阶梯或者粒子能量远大于阶梯势高度)，反射系数趋近于零，粒子完全通过；$E\approx 0$ 时(相当于 $\beta\to\infty$)，反射系数趋近于 1，粒子被完全反射，即粒子没有机会进入到右侧区域(Ⅱ). 实际上，当能量 $E<0$，粒子都将被完全反射，情况与 2 中的例子相同.

有的同学可能会对这一结果产生疑问. 坐标的选择完全是人为的呀，为什么我们把坐标轴向上移动了 V_0 而已，反射系数的表达式就有所不同了. 粒子能量与势的关系均为 $V_0=\beta E$，其散射结果难道不应该是相同的吗？这里可能大家忽略了一个细节——考虑两种不同情况下粒子以相同能量 E 入射：从经典的观点考虑，当阶梯势高于零点，粒子的动能在 $x>0$ 的区域为 $E-V_0$，而在 $x<0$ 的区域为 E；而当阶梯势与零点平齐，粒子的动能在 $x>0$ 的区域为 E，在 $x<0$ 的区域为 $E-(-V_0)=E+V_0$. 也就是说以相同能量入射的粒子，在这两种势分布下，在 $x>0$ 的区域其动能分别为 $E-V_0$ 和 E，在 $x<0$ 的区域，其动能分别为 E 和 $E+V_0$. 所以，从能量零点选取的角度考虑，一种情况下入射能量为 E 对应另一种情况下入射能量为 $E-V_0$ 的情况. 当入射粒子能量与阶梯势的相对关系一致时，所得的结果才会相同.

由一道简单的一维阶梯势的问题，我们竟然可以得到这么多有趣的结果. 这也启发我们对很多《量子力学》中的问题需要举一反三. 我们传统的课堂讲授内容可能更偏向于横向的比较，比如一维无限深势阱、一维有限深势阱、一维谐振子 …… 而对问题的纵向延伸做得不够. 这样做的结果是，同学们对老师课堂讲的例题能听懂，但是自己做习题就完全无从下手. 此文中这样的举一反三既可以增加一点课程的趣味性，也能够激励学生思考，对学过的内容提出新的问题，这就是培养学生研究能力的一个有益模式.

参 考 文 献

1　史守华. 一维定态问题的定性讨论. 安徽大学学报(自然版)，2002，26(2)：66 ～ 70

2　莫周文. 一维定态中的一些问题. 贵州师范大学学报：自然科学版，1984(1)：115 ～ 124

(下转第 21 页)

将其作为选做课后作业，满足对大学物理基本内容学有余力学生的需求.

3.3　研究型教学

打破原有讲授为主的授课方式，引入数值计算与模拟研究的教学方法，使学生变被动为主动. 选择一批有丰富物理内涵且具有较大拓展空间的典型物理问题，如，小船过河、碰撞问题、刚体模型、偶极子模型、电磁场分布模型、各类统计分布模型、光衍射模型、氢原子模型、非线性摆模型、散射模型等.

例如，任课教师在课堂上介绍了几个用 Matlab 程序求解运动学的范例，范例程序表明利用 Matlab 可以实现微积分的过程，把有限长的一个物理过程，分成许多微小过程来计算，再累积. 受到启发，有学生提出要用 Matlab 编程来解决其他运动学问题，在任课教师引导鼓励下学生自己拟定了要解决的问题，课下探索完成. 在之后的课堂上，学生将工作成果展示给其他同学，又引起同学们之间一系列的主动讨论，教学相长得到完美体现.

4　结论

针对目前高中物理学习现状，本文对大学新生的高中物理基础差异进行了调研，发现除了力学和电磁学，其他模块选修率均没有超过 60%，量子物理、相对论、机械振动和机械波模块选修率均未超过 35%；大学新生的高中物理基础差异显著，成为影响教学效果的一个重要因素. 针对该现状，设计了 3 个层次的大学物理教学方案. 第一层次通过引导选课、知识推送、管理促进和作业强化 4 个模块弥补学生物理基础的不足. 第二层次在大学物理课堂引入大学物理竞赛题目，进一步训练其物理思维. 第三层次引入数值计算与模拟研究的教学方法，使学生变被动为主动，从而更好地主动参与到研究性学习的教学活动中来.

参 考 文 献

1　白璐，吴振森. 多层面分层次大学物理教学改革. 物理与工程，2010，20(6)：43 ～ 45

2　黄熙. 如何做好大学物理与中学物理教学的有效衔接. 湖北师范学院学报(自然科学版)，2013，33(4)：104 ～ 108

3　吴钦，周雨青，丁萍，等. 浅谈大学物理与中学物理的衔接. 高等工程教育研究，2012(3)：176 ～ 180

(上接第 18 页)

3　余雷. 一维阶梯势的散射. 贵州师范大学学报：自然科学版，1996(2)：88 ～ 92

4　井孝功，赵永芳. 一维位势透射系数的计算与谐振隧穿现象的研究. 计算物理，2000，17(6)：649 ～ 654

5　曾谨言. 量子力学(上册). 北京：科学出版社，1981. 79 ～ 82

6　柯严. 中国科学院硕士研究生入学考试物理真题及解答(2006 － 2007). 世界图书出版公司，2007. 77

7　钱伯初. 量子力学. 北京：高等教育出版社，2006. 65

8　史守华，谢传梅. 量子力学考研辅导. 北京：清华大学出版社，2003. 57 ～ 59

9　钱伯初. 量子力学. 北京：高等教育出版社，2006. 61

Issue of One Dimensional Staircase Potential Worthy of Infering Other Things from One Fact

Lu Aijiang　Yang Qinyu

(Science College，Donghua University，Shanghai　201620)

Abstract：Based on the quantum mechanics problem with one dimensional (1D) step－like potential，many an interesting results have been obtained. The moving directions of the injected particles and the position of the step－like potential are attributed to the main facets of this problem. It is a good exercise about 1D stationary state，and is a typical problem to show the specialty of quantum mechanics.

Key words：step－like potential；potential function；transmission coefficient；reflectance