

三力平衡问题的数学分析*

张忠献

(邓州市第二高级中学 河南 邓州 474150)

(收稿日期:2017-10-30)

摘要:三力平衡问题是高中静力学教学的重点内容,从物理问题入手,探讨物理知识后面隐藏的数学思想和方法,试图解析在解决物理问题时,如何总结和应用数学的思想和方法.

关键词:三力平衡 数学分析 正弦定理 矢量三角形

在高中物理的学习过程中,学生会经常遇到三力平衡问题.解决此类问题的方法多是采用解析法,其实质是综合运用力的合成或分解及正交分解相关知识,利用物体受力平衡写出未知量与已知量的关系表达式,根据已知量的变化情况来确定未知量的变化情况.

由于三力平衡问题在静力学问题中占有较重的份量,故本文仅对求解三力平衡问题所运用的数学知识和方法做粗浅的探讨.

1 用相似三角形法求解三力平衡问题

【例1】(单选)如图1所示,质量均可忽略的轻绳与轻杆承受弹力的最大值一定,杆的A端用铰链固定,光滑轻小滑轮在A点正上方,B端吊一重物,重力为G,现将绳的一端拴在杆的B端,用拉力F将B端缓慢上拉,在AB杆达到竖直前(均未断),关于绳子的拉力F和杆受的弹力 F_N 的变化,判断正确的是()

- A. F 变大
- B. F 变小
- C. F_N 变大
- D. F_N 变小

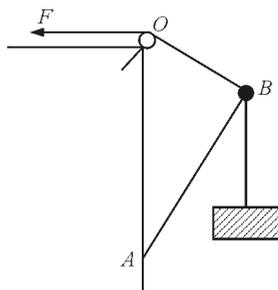


图1 例1题图

解析:以B点为研究对象,分析受力情况,作出受力分析图,如图2所示,作出力 F_N 与F的合力 F_2 ,根据平衡条件得知 $F_1 = F_2 = G$.由 $\triangle F_2 F_N B \sim \triangle OBA$ 得 $\frac{F_N}{F_2} = \frac{BA}{AO}$,解得 $F_N = \frac{BA}{AO}G$,式中,BA, AO, G不变,则 F_N 保持不变,C和D错误.由 $\triangle F_2 F_N B \sim \triangle OBA$ 得 $\frac{F}{AB} = \frac{F}{OB}$,OB减小,则F一直减小,A错误,B正确.

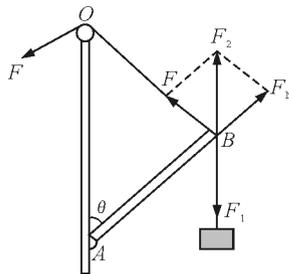


图2 例1分析图

点评:两个相似三角形的对应边成比例,这是平

* 2017年度河南省基础教育教学研究项目“高中物理教学中数学思想方法应用策略研究”研究成果,项目编号:JCJYC17062301

作者简介:张忠献(1976-),男,中教一级,主要从事高中物理教学工作.

面几何中相似三角形的一个重要性质. 将相似三角形对应边成比例用于求解三力平衡问题, 可谓是另辟蹊径, 别有洞天. 该解法适用于物体受到了3个力的作用, 其中一个力是恒力, 另外两个力的方向都变化, 且题目给出了空间几何关系. 这样的解法使求解三力平衡问题走上了捷径.

2 用正弦定理求解三力平衡问题

【例2】(单选) 如图3所示, a, b 两个小球穿在一根光滑的固定杆上, 并且通过一条细绳跨过定滑轮连接. 已知 b 球质量为 m , 杆与水平面成 θ 角, 不计所有摩擦, 重力加速度为 g . 当两球静止时, Oa 绳与杆的夹角也为 θ , Ob 绳沿竖直方向, 则下列说法正确的是()

- A. a 可能受到 2 个力的作用
- B. b 可能受到 3 个力的作用
- C. 绳子对 a 的拉力大于 mg
- D. a 的重力为 $mg \cot \theta$

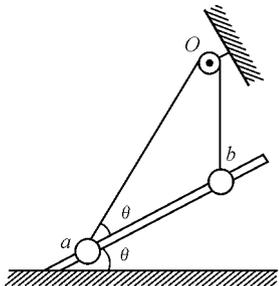


图3 例2题图

解析: a 球受力分析图如图4所示, a 球受到重力、绳子的拉力以及杆对 a 球的弹力, 3 个力的合力为零, 选项 A 错误. 对 b 球受力分析可知, b 受到重力和绳子的拉力, 两个力合力为零, 杆对 b 球没有弹力, 否则 b 不能平衡, 选项 B 错误. 由于 b 受到重力和绳子拉力处于平衡状态, 则绳子拉力 $T = mg$, 同一根绳子上的拉力相等, 故绳子对 a 的拉力等于 mg , 选项 C 错误. 分别对 a, b 两球受力分析, 运用合成法, 如图4中所示, 根据正弦定理列式得

$$\frac{T}{\sin \theta} = \frac{m_a g}{\sin(90^\circ + \theta)}$$

解得

$$m_a g = \frac{mg}{\tan \theta} = mg \cot \theta$$

选项 D 正确.

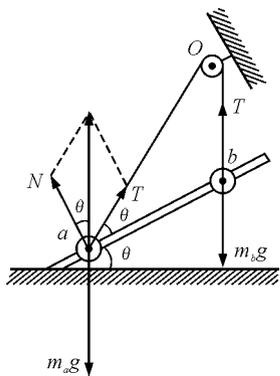


图4 例2分析图

点评: 正弦定理(亦称拉密定理)是数学中的一个定理, 它反映了三角形中3个边与相邻边夹角正弦值间相互制约的关系. 在三力平衡问题中, 这3个力组成一个首尾相连的封闭矢量三角形, 故在求解三力平衡时运用正弦定理, 就使得3个力及其夹角正弦值之间的关系一目了然, 显示出快速解题的优越性. 在求解三力平衡时, 若已知或者容易算出3个力间的夹角和一个力时, 选用正弦定理, 可以说是明智之举.

3 用图解法求解三力动态平衡问题

【例3】(单选) 如图5所示, 一小球在斜面上处于静止状态, 不考虑一切摩擦, 如果把竖直挡板由竖直位置缓慢绕 O 点转至水平位置, 则此过程中球对挡板的压力 F_1 和球对斜面的压力 F_2 的变化情况是()

- A. F_1 先增大后减小, F_2 一直减小
- B. F_1 先减小后增大, F_2 一直减小
- C. F_1 和 F_2 都一直减小
- D. F_1 和 F_2 都一直增大

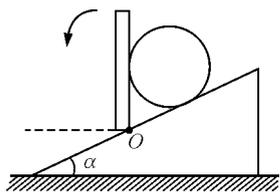


图5 例3题图

解析:小球受力分析如图6所示,因挡板是缓慢转动,所以小球处于动态平衡状态,在转动过程中,重力 G ,斜面的支持力 F'_2 和挡板的弹力 F'_1 三力平衡(重力大小方向均不变,斜面的支持力方向不变),由图可知, F'_1 先变小后变大, F'_2 始终变小,再由牛顿第三定律知B正确.

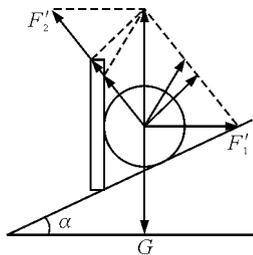


图6 例3分析图

点评:在共点力的平衡中,有些题目中常有“缓慢”一词,则物体处于动态平衡状态.解决此类问题常用图解法.若题目满足有一个力大小、方向均不变,另一个力方向不变,还有一个力的方向变化时,可画出这3个力的力矢三角形,结合大小、方向变化情况,分析得出未知量的变化情况.图解法体现了数学中数形结合的思想,它的优点是能将各力的大小、方向等变化趋势形象、直观地反映出来,大大降低了解题难度和计算难度.

4 用三角函数极值法求解三力平衡问题

【例4】(单选)如图7所示,倾角 $\theta=30^\circ$ 的斜面固定,重为 G 的物体恰好可以沿斜面匀速下滑,现对物体施加一拉力(图中未画出),使物体沿斜面匀速上滑,则该拉力的最小值为()

- A. $\frac{1}{2}G$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}G$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}G$ D. G

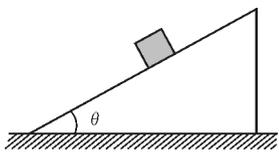


图7 例4题图

解析:物体恰好能沿斜面下滑,因此

$$mg \sin \theta = \mu mg \cos \theta$$

故

$$\mu = \tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

设拉力与斜面夹角为 α 时拉力最小,受力分析如图8所示.

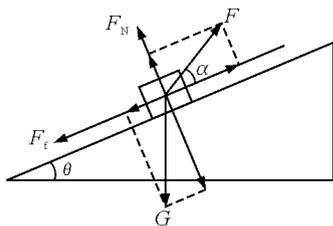


图8 例4分析图

根据力的平衡有

$$F \cos \alpha = G \sin \theta + F_f$$

$$F_N + F \sin \alpha = G \cos \theta$$

$$F_f = \mu F_N$$

联立得

$$F = \frac{G \sin \theta + \mu G \cos \theta}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha}$$

令

$$\tan \alpha = \frac{1}{\mu}$$

得

$$F = \frac{G \sin \theta + \mu G \cos \theta}{\sqrt{1 + \mu^2} \sin(\alpha + \theta)}$$

即最小值

$$F_{\min} = \frac{G \sin \theta + \mu G \cos \theta}{\sqrt{1 + \mu^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}G$$

故C项正确.

点评:函数思想是数学的核心思想.该题型的解题方法是把角度 θ 作为参数,依据平衡条件得到未知量的函数表达式,利用三角函数关系得到它的极值.高中学生已经掌握三角函数相关知识,当遇到极值类问题时,他们还可以联想到导数等相关知识.这样做的好处是简化解题过程,拓宽解题思路.

参考文献

- 1 张宝权. 三力平衡问题与数学方法. 中学理科参考资料, 1993(3):13 ~ 16
- 2 杨志强. 例谈高中物理三力平衡中的几种特殊解决方法. 中学生理科应试, 2016(5):49 ~ 50