引力距离为什么不能从质心计算

金　逊

（南京市燕子矶中学　江苏 南京　210038）

（收稿日期：2017 - 11 - 02）

摘　要：研究地面物体受力情况，经常可以认为质量集中于质心，进行整体分析．万有引力问题，是否可以对系统整体分析？以球体的挖补问题为契入点，结合历史文献，通过对引力距离表达式的分析，说明除均匀球体外，从质心计算引力距离，一般是不正确的．即万有引力问题，一般不能整体分析．进而具体分析了哑铃状物体、三星绕转等多个常见实例，并指出一般物体与上述模型的关系．最后，提出了对研究问题的启示．

关键词：引力距离　质心　均匀球体　挖补　系统

不少师生根据地面物体受力分析的经验，将整体法推广到多体的引力问题．但是，这种推广是错误的．本文结合历史文献说明，非均匀球体的引力距离一般不能从质心计算，多体的万有引力问题一般不能整体分析．

1　挖补问题

在高中物理教辅用书上频频出现这样一个问题："球体挖去一小球后对另一质点的吸引力"．利用挖补的思路计算物体之间的万有引力，多种解法结果不同．

1.1　问题的描述

大球挖去小球后，求剩余部分对质点的吸引力．下面是资料上一种常见的描述．

一半径为 R，质量为 M 的均匀球体，其球心 O 与另一质量为 m 的质点 B 距离为 $2R$，如图 1 所示．

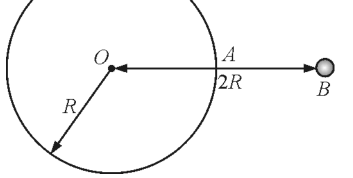

图 1　均匀球体与质点关系图示

若挖去以 OA 的中心 O_1 为球心、R 为直径的球体，如图 2 所示，求剩余部分对质点 B 的吸引力 F_0．

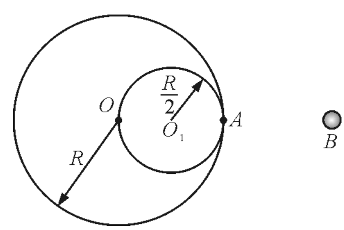

图 2　均匀球体内挖去一个小球体

1.2　3 种挖补方法

挖补法是基于等效替代的思想处理问题，用该法求解一些特殊物体间的作用力时，可以避开复杂的高等数学知识，仅利用中等数学就可顺利求解，因此受到广大师生的欢迎．以下 3 种解法均为中学阶段容易想到的挖补法，结果各不相同，原因何在？

解法 1：整体引力减去挖去部分引力

剩余部分对质点 B 的吸引力等于，挖前整体对物体的吸引力，减去挖去部分（挖前）对物体的吸引力．设挖前整个球对质点 B 的吸引力为 F，挖去部分在挖前对质点 B 的吸引力为 F_1，则

$$F_0 = F - F_1 \qquad (1)$$

根据万有引力定律，有

$$F = G\frac{Mm}{(2R)^2} \qquad (2)$$

作者简介：金逊（1973 -　），男，特级教师，正高级，市拔尖人才，学科带头人，主要从事中学物理教学及研究．

挖前球体的体积$V=\frac{4}{3}\pi R^3$，挖去部分的体积为$V_1=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{R}{2}\right)^3$，设挖去部分质量为 m_1，则

$$m_1=\frac{M}{V}V_1=\frac{1}{8}M \tag{3}$$

挖去部分在挖前对质点 B 的吸引力为

$$F_1=G\frac{m_1 m}{\left(\frac{R}{2}+R\right)^2} \tag{4}$$

把式(3)代入式(4)，得

$$F_1=G\frac{Mm}{18R^2} \tag{5}$$

式(2)、(5)代入式(1)，得挖去后剩余部分对质点 B 的吸引力为

$$F_0=\frac{7GMm}{36R^2}=0.194\frac{GMm}{R^2} \tag{6}$$

解法 2:再挖去一球，利用对称性求解

在大球的左部，与 O_1 关于球心 O 点对称的位置，再挖去一个同样的小球 O_2，如图 3 所示. 设挖去小球 O_1，O_2 后，剩余部分的质量为 M_1. 挖去小球 O_2 前，小球 O_2 对质点 B 的吸引力为 F_2，挖去 Q_1 和 Q_2 后剩余部分对质点 B 的吸引力为 F_3，则题目所求即为

$$F_0=F_2+F_3 \tag{7}$$

$$F_2=G\frac{m_1 m}{\left(2R+\frac{R}{2}\right)^2}$$

把式(3)代入上式，得

$$F_2=G\frac{Mm}{50R^2} \tag{8}$$

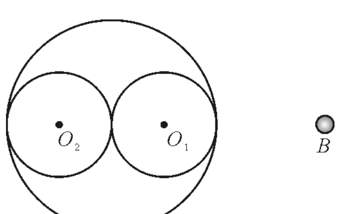

图 3　解法 2 图示

由于小球 O_1 和 O_2 的对称性，挖去小球 O_1 和 O_2 后，剩余部分的质心仍在大球球心 O 处，其质量 $M_1=M-2m_1$，结合式(3)知 $M_1=\frac{3}{4}M$，所以

$$F_3=G\frac{M_1 m}{(2R)^2}=G\frac{3Mm}{16R^2} \tag{9}$$

把式(8)、(9)代入式(7)，得挖去 O_1 后剩余部分对质点 B 的吸引力为

$$F_0=\frac{83GMm}{400R^2}=0.208\frac{GMm}{R^2} \tag{10}$$

解法 3:利用剩余部分的质量和质心距离计算

先求剩余部分的质量和质心位置，再把质心距离作为引力距离，利用万有引力定律直接求剩余部分对质点 B 的吸引力 F_0.

设剩余部分的质量为 M_2，则 $M_2=M-m_1$，将式(3)代入得

$$M_2=\frac{7}{8}M \tag{11}$$

剩余部分的质心应该位于大球球心 O 点左方，设其距 O 点距离为 r，如图 4 所示. 挖前整体的质心应在 O 点，根据质心关系有

$$M_2 r=m_1\frac{R}{2}$$

将式(3)、(11)代入上式，得

$$r=\frac{1}{14}R \tag{12}$$

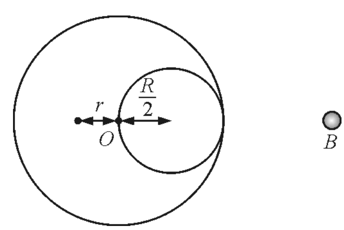

图 4　解法 3 图示

剩余部分的质心距质点 B 的距离为 $r+2R$，故剩余部分对质点 B 的吸引力为

$$F_0=G\frac{M_2 m}{(r+2R)^2}$$

将式(11)、(12)代入上式，得

$$F_0=\frac{343}{1682}\frac{GMm}{R^2}=0.204\frac{GMm}{R^2} \tag{13}$$

1.3　3 种解法比较

3 种解法得到的结果，分别是式(6)、式(10)、式(13). 很明显，3 种解法结果各不相同. 可是，它们都是从质心计算引力的，问题出在哪里?

2　释疑解惑

这就牵涉到万有引力定律的成立条件. 严格地

说，万有引力定律只适用于质点. 对于相距较远的天体，可以看做质点，距离的选取较为简单. 而以上问题中两者相距较近，不能看作质点. 分析它们之间的万有引力，距离应该从哪里算，能不能从质心来计算？即能否整体分析？

2.1　历史的回顾

牛顿当初就被距离从哪里算的问题，困扰了近 20 年的时间. 早在 1666 年，牛顿就根据开普勒第三定律推出，行星围绕太阳运动所需要的力与距离的平方成反比，但是到 17 世纪 80 年代才重新提起引力定律. 主要原因之一是，牛顿在分析地球对月球以及地球对它表面物体的吸引力时，不能确定距离从哪里算. 1685 年初，情况才出现了转机，牛顿用他自己开创的微积分证明了，地球吸引外部物体时，恰像全部的质量集中在球心一样. 也就是说，均匀球体对其外部物体的吸引力，可以从质心（球心）计算距离[1].

2.2　万有引力一般不能从质心整体分析

在力学中受力分析常见的有隔离法、整体法. 在都能解决问题的时候，整体法往往优于隔离法. 除均匀球体外，一般物体（或多体系统）对其外部物体的万有引力是否也可以从质心计算距离，整体分析呢？

答案是：一般不可以. 上述 3 种解法中，第一种解法，均匀球体对其外部物体的吸引力，从质心（球心）计算距离. 这种方法从牛顿开始，经过多次的理论推证和实践检验，证明是正确的. 后两种解法得到的结果与解法 1 不同，是错误的.

上述 3 种不同的挖补方法，结果各不相同，这就表明：对于非均匀球体，不能认为可以从质心计算万有引力.

原因是，质心与物体位置有关，质心与距离遵循一次函数关系. 而万有引力与距离是平方反比关系，两者与距离的关系并不等价. 所以，引力距离一般不能从质心计算. 均匀球体是特例. 一般物体受到的万有引力是否可以从质心计算，需另行证明. 到底应该从哪里计算距离，一般需要利用微积分的思想进行具体分析.

讨论重力问题的时候，为什么可以从质心整体分析？因为在地球表面附近，重力场可以认为是均匀的，重力的合成与位置无关. 而大尺度的引力场不能认为是均匀的，引力的合成与位置有关. 故，不能用重力合成的规律来类比. 同理，在讨论高空重力问题时，如果考虑重力加速度 g 随位置的变化，一般也不能从质心整体分析.

下述利用多个天体绕转的实例进一步验证.

3　两物体组成系统（哑铃状物体）轴线方向受力

以下是中学常见的“哑铃”状系统. A 和 B 两均匀人造球体，质量均为 m，由轻质硬杆相连，形如一个“哑铃”，如图 5 所示. A，B 两物体和中心天体 C 始终在一条直线上，A，B 两物体和轻杆成为 C 的一个卫星. A，B 分别以 r_1 和 r_2 为半径绕 C 做圆周运动. 中心天体 C 的质量为 M，不计 A，B 之间的万有引力. 求此卫星受到 C 的万有引力（资料上的试题，一般求周期. 这里为方便对比，改为求引力）.

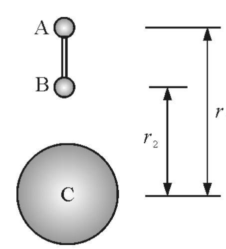

图 5　两物体组成系统轴线方向受力情境图

解法 1：对卫星（A，B 两物体组成系统）整体分析

卫星由 A，B 及轻杆组成，将其看作一个系统. 该系统的质心位于轻杆中某点，距 C 中心为

$$r=\frac{r_1+r_2}{2}$$

如果 A，B 两物体组成系统受到其他物体的万有引力可以认为系统的质量集中于质心，整体求解，得卫星（A，B 两物体组成系统）与天体 C 之间的万有引力

$$F=G\frac{2mM}{r^2}=G\frac{8mM}{(r_1+r_2)^2}\tag{14}$$

解法 2：对 A，B 隔离分析

A 受到 C 的万有引力

$$F_1 = G\frac{mM}{r_1^2}$$

B 受到 C 的万有引力

$$F_2 = G\frac{mM}{r_2^2}$$

对此两力进行合成，得卫星系统受到合力

$$F' = F_1 + F_2 = GmM\left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2}\right) \tag{15}$$

整体分析与隔离分析，结果是否等价？

如果 $F \neq F'$，即对 A，B 两物体组成系统整体分析与隔离分析再求合力，结果不等价. 意味着求 A，B 系统受到的万有引力，不能认为系统的质量集中于质心.

反之，如果 $F = F'$，意味着 A，B 系统受到其他物体的万有引力，可认为质量集中于质心.

由式(14)、(15)，由于 r_1 和 r_2 具体数值均未知，一般 $F \neq F'$. 在某种特殊情况，也可能 $F = F'$. 下面，我们分析满足何种条件会出现 $F = F'$.

假设 $F = F'$，由式(14)、(15)，知

$$G\frac{8mM}{(r_1 + r_2)^2} = GmM\left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2}\right)$$

展开，可得

$$r_1^4 + r_2^4 + 2r_1r_2^3 + 2r_1^3r_2 - 6r_1^2r_2^2 = 0$$

即

$$r_1^4 - r_1^2r_2^2 + r_2^4 - r_1^2r_2^2 + 2r_1r_2^2(r_2 - r_1) + 2r_1^2r_2(r_1 - r_2) = 0$$

整理，得

$$r_1^2(r_1^2 - r_2^2) + r_2^2(r_2^2 - r_1^2) + (r_1 - r_2)(2r_1^2r_2 - 2r_1r_2^2) = (r_1 - r_2)[r_1^2(r_1 + r_2) - r_2^2(r_1 + r_2) + 2r_1^2r_2 - 2r_1r_2^2] = (r_1 - r_2)[r_1^3 + r_1^2r_2 - r_2^2r_1 - r_2^3 + 2r_1^2r_2 - 2r_1r_2^2] = (r_1 - r_2)[r_1^3 - r_2^3 + 3r_1r_2(r_1 - r_2)] = (r_1 - r_2)^2 \cdot [r_1^2 + r_1r_2 + r_2^2 + 3r_1r_2] = 0$$

由于 $r_1 > 0$，$r_2 > 0$，欲使以上成立，必

$$r_1 - r_2 = 0$$

所以当 $r_1 = r_2$ 时，$F = F'$.

即当 A，B 两物体重合时，A，B 系统受到的万有引力，才能认为质量集中于质心. 也就是说，正常情况下，两物体组成系统(哑铃状物体) 沿轴线方向受到其他物体的万有引力，不能认为质量集中于质心. 即两体系统受其他物体的万有引力，一般不能整体分析.

4　三星绕转

3 颗质量相等的行星 A，B，C 位于正三角形的顶点处，都绕三角形的中心做圆周运动，设每颗星的质量均为 m，相邻两颗星距离为 L，如图 6 所示. 每颗行星运行所需向心力都由其余两颗行星对其万有引力的合力来提供.

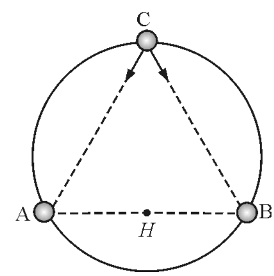

图 6　三星绕转情境图

解法 1：对 AB 系统整体分析. 如果把 A，B 两颗星看作一个系统，该系统的质心位于两者连线的中点 H. 质心与第 3 颗星 C 的距离为

$$r = L\sin 60^\circ$$

如果 A，B 两物体组成系统对 C 物体的万有引力可以认为系统的质量集中于质心，整体求解，得

$$F = G\frac{2mm}{r^2} = \frac{8}{3}G\frac{m^2}{L^2}$$

解法 2：隔离法

A，B 两物体对天体 C 万有引力的合力为

$$F' = 2G\frac{mm}{L^2}\cos 30^\circ = \sqrt{3}G\frac{m^2}{L^2}$$

很明显，两者并不一致，且差距较大. 也就是说，两物体组成的系统在垂直连线方向对第三者的万有引力，不能认为质量集中于系统的质心.

如果 3 个物体质量不等，位置不对称，或者其他更复杂的情况，亦可类似证明.

5　总结

对于其他结构更复杂的系统，总可以分解为多个纵向和横向的情况进行类似的处理. 通过对多种情况的分析，可以发现，几个物体组成的系统，该系统与其他物体间的万有引力，通常不能认为质量集

中于系统的质心进行整体分析,即万有引力的计算与质心无关.

严格地说,万有引力定律只适用于质点.对于不能看做质点的物体,一般用微积分的思想进行分析.

均匀球体对其外部物体的吸引力,可以从质心(球心)计算距离.此为特例.非均匀球体,对其外部物体的吸引力,一般不能从质心(或球心)计算距离.

6 启示

真理是相对的.原来以为很正确的东西,可能也存在一些缺陷.当外部条件略有变化的时候,其结论未必还成立.中学阶段在分析万有引力问题时,遇到最多的是均匀球状天体对其他物体的吸引力,这种情况可以从质心(球心)计算引力距离.许多师生受此影响,不加证明将该结论推广到非均匀球体,导致了一些貌似合理的错误.教训告诉我们,直觉不一定是正确的,直觉只是给我们提供了一个可能的研究方向,其是否正确需要我们作进一步的科学分析[2].

再比如,在力学中,经常把物体看作质点,但是在热学部分,许多情况又恰恰不能把物体看作质点,需要考虑其体积的变化.这就导致许多人在处理相关问题时栽在了"体积"这匹黑马上[3].

在科学史上,类似的事情也发生过多次.比如,李政道和杨振宁获得诺贝尔物理学奖的成果是,提出"弱相互作用中宇称不守恒".在"李-杨"之前,人们发现很多情况下"宇称守恒",于是大家想当然地认为,宇称在其他情况下也是守恒的.在"李-杨"提出"弱相互作用中宇称不守恒"之后,吴健雄(美籍华裔)进行了实验验证,证实了"李-杨"的观点.

最后,我们以吴健雄的话作为总结."这件事给我们一个教训,就是永远不要把所谓'不验自明'的定律视为是必然的."

参考文献

1 吴国盛.科学的历程(第 2 版).北京:北京大学出版社,2002.213 ~ 214

2 金逊.到底是几倍.中学物理,2014(21):71 ~ 72

3 金逊.热功部分要注意"体积"黑马.理科考试研究·高中版,2005(1)

(上接第 44 页)

作出 $B-t$ 图像如图 2 所示.

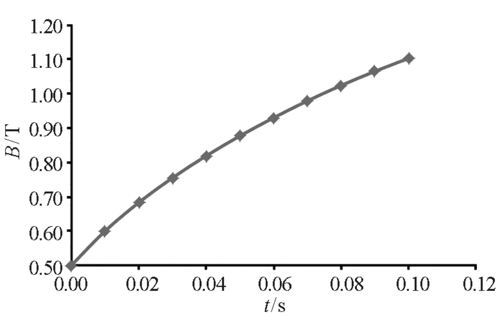

图 2 $a = 4\ \mathrm{m/s^2}$ 时的 $B-t$ 图像

假如要使棒 AB 静止释放后以 $5\ \mathrm{m/s^2}$ 的加速度向上运动,即取 $a = -5\ \mathrm{m/s^2}$,同理可以求出对应的 $B = B(t)$ 在不同时刻的值,如表 2 所示.

表 2 当 $a = -5\ \mathrm{m/s^2}$ 时各时刻对应的 B 值

t/s	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
B/T	0.500	1.051	1.313	1.526	1.711	1.880
t/s	0.06	0.07	0.08	0.09	0.10	
B/T	2.038	2.188	2.332	2.473	2.613	

作出 $B-t$ 图像如图 3 所示.

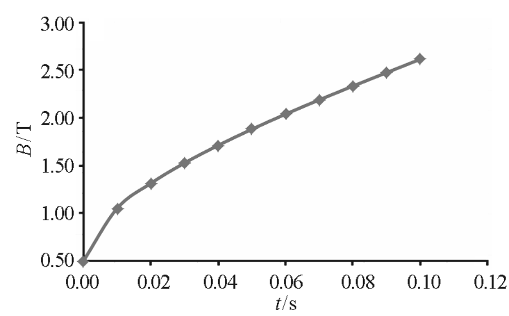

图 3 $a = -5\ \mathrm{m/s^2}$ 时的 $B-t$ 图像

用同样的方法可以求出对应棒 AB 以任一加速度运动,磁感应强度 B 随时间 t 的变化方式.

4 结论

通过上面的研究知道,常规解法得到的结果,只是一个特殊解,并不是这个问题的唯一解.实际上,只要磁场以恰当的方式变化,导体棒能以任一加速度沿导轨向下匀加速运动,也能以任一加速度沿导轨向上匀加速运动,还可以保持静止不动.